This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

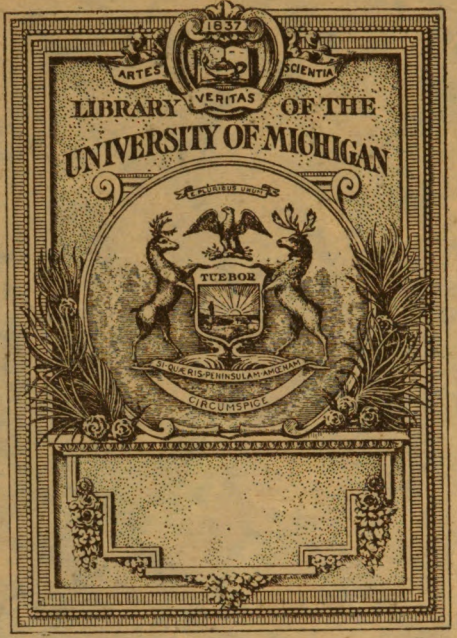
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

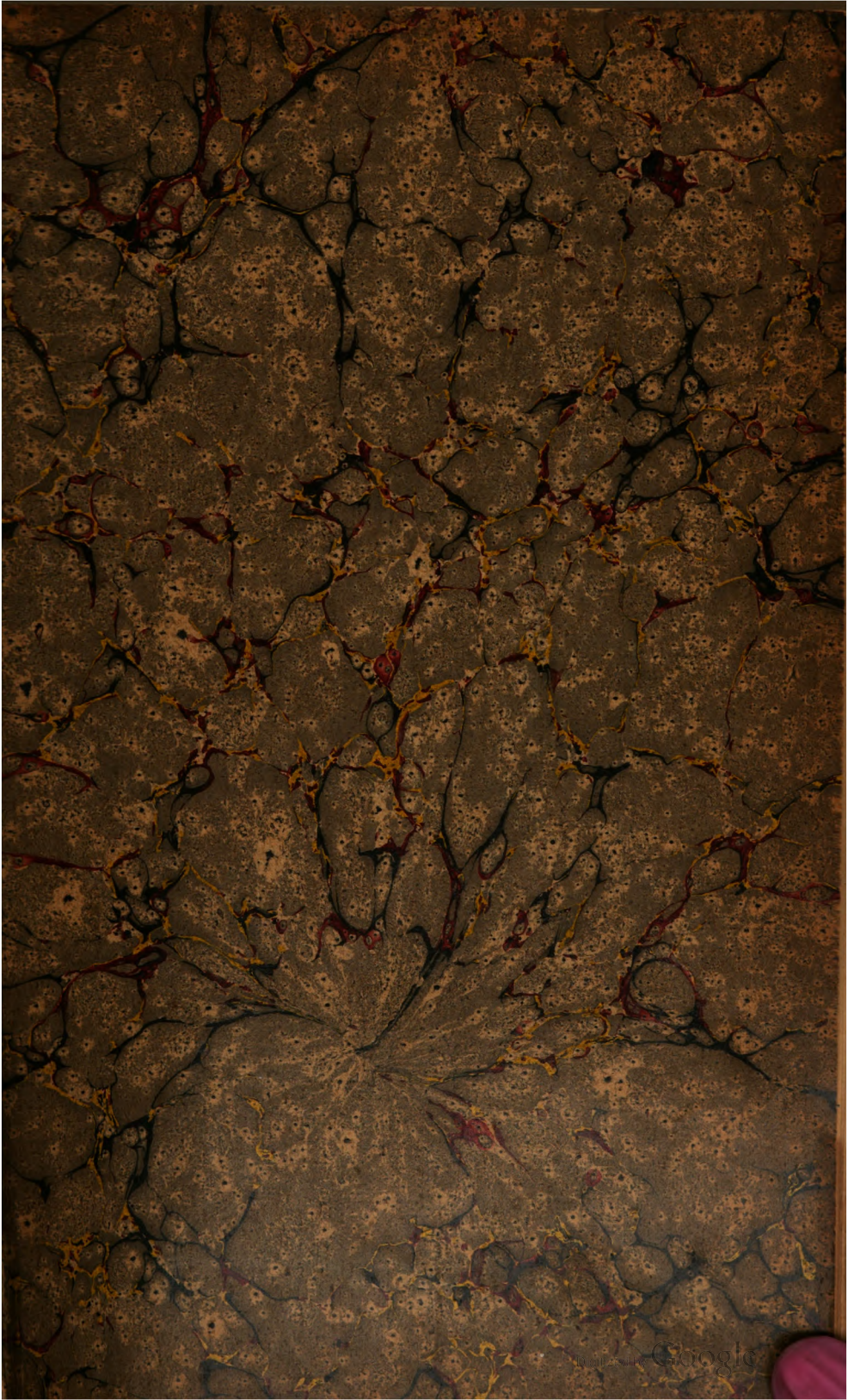
About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

Digitized by Google


Digitized by Google

Digitized by Google

Mathematics
QA
343
.D955
1878

Digitized by Google

Digitized by Google

571

2.5

Alexander Ziwet

THEORIE

DER

ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

VERSUCH EINER ELEMENTAREN DARSTELLUNG

VON

DR. H. DURÈGE,

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU PRAG.

DRITTE AUFLAGE.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1878.

Digitized by Google

Prof. Alex. Zinet
gt.
2-6-1923

Das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen wird vorbehalten.

Digitized by Google

M E W 32-11-1

Vorwort.

In der vorliegenden neuen Auflage sind der früheren gegenüber keine erheblichen Veränderungen vorgenommen worden; es wurde nur eine die Geometrie nicht zu Hülfe nehmende Ableitung der Landen'schen Transformation hinzugefügt.

Prag, 21. März 1878.

H. Durège.

417216

Digitized by Google

Inhalt.

Abschnitt I.

Begriff der elliptischen Functionen.

Seite

§. 1. Eigenschaften der trigonometrischen und Exponentialfunctionen. Dieselben sind die oberen Grenzen algebraischer Integrale 1
§. 2. Die elliptische Function definirt als Umkehrung eines algebraischen Integrals 4
§. 3. Bezeichnung der elliptischen Functionen. Einführung der Function Δ 6
§. 4. Erste Eigenschaften der elliptischen Functionen. Ihre Differentialquotienten sind wieder elliptische Functionen . 9
§. 5. Anwendung auf das ebene Pendel 11
§. 6. Fortsetzung 13

Abschnitt II.

Von der Periodicität der elliptischen Functionen.

§. 7. Die reelle Periode. Werthe der elliptischen Functionen mit dem Argument K 16
§. 8. Die imaginäre Periode. Formeln für $\sin am\, iu$, $\cos am\, iu$, $\Delta am\, iu$ 22
§. 9. Anwendung auf das ebene Pendel. Schwingungsdauer . . 25
§. 10. Formeln für die elliptischen Functionen mit den Argumenten $u \pm K$, $iu \pm K$, $u \pm iK'$, $iu \pm iK'$, $u \pm K \pm iK'$, $iu \pm K \pm iK'$. Werthe der elliptischen Functionen für die Argumente $\frac{K}{2}$, iK', $K \pm iK'$ 26

Abschnitt III.

Von der Reduction der elliptischen Integrale auf die Normalform.

§. 11. Elliptische Integrale im weitesten Sinne genommen. Reduction derselben auf ihre einfachste Gestalt 31
§. 12. Reduction des Integrals $\int \frac{dx}{R}$ auf die Normalform 33
§. 13. Nähere Betrachtung des Falles, dass die Gleichung $R^2 = 0$ vier reelle Wurzeln hat 42
§. 14. Betrachtung des Falles, dass R^2 nur vom dritten Grade ist 50
§. 15. Anwendung auf die Pendelaufgabe. Untersuchung des ganz herumschwingenden Pendels 51
§. 16. Betrachtung der Fälle, dass die Gleichung $R^2 = 0$ zwei oder vier imaginäre Wurzeln hat. Ausdruck für den Bogen einer Lemniscate 56

Digitized by Google

Abschnitt IV.

Von den drei Gattungen elliptischer Integrale.

Seite

§. 17. Reduction aller elliptischen Integrale auf drei bestimmte Formen 60
§. 18. Die zweite Gattung. Ausdruck für den Bogen einer Ellipse 67
§. 19. Einführung der Transcendenten $E(u)$. Zurückführung von Integralen, welche die Quadrate elliptischer Functionen enthalten, auf $E(u)$ 70
§. 20. Ausdruck für den Bogen einer Hyperbel. 73
§. 21. Die dritte Gattung. Einführung der Transcendenten $\Pi(u,a)$. Beweis des Satzes: $\Pi(u,a) - uE(a) = \Pi(a,u) - aE(u)$. Werthe von $\Pi(u,K), \Pi(u,iK'), \Pi(u,K+iK'), \Pi(o,a), \Pi(K,a)$ 77

Abschnitt V.

Ueber eine Substitution der zweiten Ordnung zur Reduction der elliptischen Integrale auf die Normalform.

§. 22. Allgemeine Formeln. Anwendung auf die Pendelaufgabe 80
§. 23. Anwendung auf das Integral $\int \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\lambda^2 v^2)}}$, in welchem λ und v beliebig sind. Werthe des elliptischen Integrals zwischen den Grenzen $1 \ldots \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \ldots \infty$ . . . 86
§. 24. Formeln für die Functionen von $am\left(ku, \frac{1}{k}\right)$ und $am\left(ku, \frac{ik'}{k}\right)$ 90

Abschnitt VI.

Das Additionstheorem.

§. 25. Vorbereitende trigonometrische Betrachtungen. 95
§. 26. Integration der elliptischen Differentialgleichung nach der Sturm'schen Methode 100
§. 27. Euler's Methode 103
§. 28. Lagrange's Methode. Ableitung der Lagrange'schen Formel 107
§. 29. Ableitung der Fundamentalformeln für $\sin am(u \pm v)$, $\cos am(u \pm v)$, $\Delta am(u \pm v)$ 111
§. 30. Zusammenstellung der wichtigsten, aus dem Additionstheorem fliessenden Formeln 113

Abschnitt VII.

Ueber den Zusammenhang der elliptischen Functionen mit der sphärischen Trigonometrie.

§. 31. Darstellung von $am(u+v)$ und $am(u-v)$ als dritte Seite eines sphärischen Dreiecks, dessen andere Seiten $am\,u$ und $am\,v$ sind 118
§. 32. Darstellung von $am\,2u$, $am\,3u$ etc. 122
§. 33. Ableitung der Gaussischen Formeln aus den Formeln für die elliptischen Functionen, und des Additionstheorems aus der sphärischen Trigonometrie 123

Digitized by Google

Abschnitt VIII.

Das Additionstheorem für die zweite und dritte Gattung.

Seite

§. 34. Additionstheorem für die zweite Gattung 127
§. 35. Additionstheorem für die dritte Gattung 130

Abschnitt IX.

Das Abel'sche Theorem.

§. 36. Darstellung einer Summe von algebraischen Integralen, von welchen die elliptischen Integrale aller drei Gattungen specielle Fälle sind 133
§. 37. Beweis des ersten Theils des Abel'schen Theorems. . . . 140
§. 38. Beweis des zweiten Theils des Abel'schen Theorems . . . 148
§. 39. Bestimmung des niedrigsten Grades der algebraischen Gleichung 152
§. 40. Ableitung des Additionstheorems für die elliptischen Integrale der drei Gattungen aus dem Abel'schen Theorem . 155

Abschnitt X.

Jacobi's geometrische Construction des Additionstheorems.

§. 41. Betrachtung zweier excentrischer Kreise und Construction zweier Winkel, welche der elliptischen Differentialgleichung genügen 165
§. 42. Zu einem gegebenen Werthe des Moduls k gehört ein System von Kreisen, die mit dem äusseren Kreise eine gemeinschaftliche Linie der gleichen Tangenten haben. Lösung der Aufgabe, denjenigen Kreis aus der zu einem gegebenen Modul gehörigen Schaar zu finden, welcher eine gegebene Sehne des äusseren Kreises berührt 168
§. 43. Einführung des Grenzpunktes. Lösung der vorigen Aufgabe vermittelst desselben 171
§. 44. Geometrische Integration der elliptischen Differentialgleichung 174
§. 45. Geometrische Construction der Amplitude der Summe und Differenz und der Amplituden vielfacher Argumente . . . 177
§. 46. Ueber Vielecke, die einem Kreise eingeschrieben und einem anderen Kreise umschrieben sind 180
§. 47. Ableitung der Relationen für das Dreieck, Viereck und Fünfeck 184

Abschnitt XI.

Die Landen'sche Transformation.

§. 48. Geometrische Ableitung derselben. 188
§. 49. Entwickelung der verschiedenen Formeln für die transformirten Moduln und Amplituden 190
§. 49a. Directe Ableitung der Landen'schen Transformation . . . 193
§. 50. Berechnung von K, $F(\varphi, k)$ und $am(u, k)$. 197
§. 51. Bestimmung des Grenzwerthes von $\frac{K'(n)}{2^n}$ 204
§. 52. Annäherung durch Vergrösserung des Moduls' 206
§. 53. Näherungswerth von K für Werthe von k nahe an 1 . . 211

Digitized by Google

Abschnitt XII.

Entwickelung der elliptischen Functionen in Factorenfolgen.

Seite

§. 54. Zerfällung von sin *am u* in Factoren und Entwickelung von tg *am u* in ein unendliches Product 214
§. 55. Ueber die Grössen q und q' 221
§. 56. Entwickelung der unendlichen Producte für sin *am u*, cos *am u*, Δ *am u* 223
§. 57. Bestimmung der Constanten 226

Abschnitt XIII.

Entwickelung der elliptischen Functionen in Reihen.

§. 58. Auseinandersetzung der Entwickelungsmethode. Reihen für $\frac{2K}{\pi}$ und $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2$ 233
§. 59. Ableitung der Reihen für $\frac{1}{\sin am(K-u)}$, $\frac{1}{\sin am\, u}$, sin *am u* 241
§. 60. Ableitung der Reihen für cotg *am u*, Δ *am u*, *am u* . . . 244
§. 61. Zusammenstellung der wichtigsten Reihen. Vertauschung von q mit $-q$ 249

Abschnitt XIV.

Reihenentwickelung für die zweite Gattung.

§. 62. Ableitung der Reihe für $\sin^2 am\, u$ 252
§. 63. Reihen für $E(u)$ und E. Einführung der Function $Z(u)$ 257

Abschnitt XV.

Reihenentwickelung für die dritte Gattung.

§. 64. Entwickelung von $\Pi(u, a)$ 258

Abschnitt XVI.

Die Jacobi'sche Function.

§. 65. Einführung derselben durch die Reihe

$$\Theta(u) = 1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + \cdots$$

Ermittelung der Werthe von $\Theta(0)$, $\Theta(K)$, $\Theta\left(\frac{K}{2}\right)$.... . 261
§. 66. Zusammenhang der Theorie der elliptischen Functionen mit der Zahlentheorie. Beweis des Satzes, dass jede ganze Zahl die Summe von vier Quadraten ist 268

Abschnitt XVII.

Darstellung der elliptischen Functionen durch die Jacobi'sche Function.

§. 67. Einführung der Jacobi'schen Function in die dritte Gattung und Darstellung der Functionen $Z(u)$ und Δ *am u* . . . 273
§. 68. Darstellung von sin *am u* und cos *am u*. Die Function H. Neue Reihenentwickelung für die elliptischen Functionen 278

Digitized by Google

Abschnitt XVIII.

Ueber die elliptischen Transcendenten der dritten Gattung.

Seite

§. 69. Aufstellung der verschiedenen Fälle 283

§. 70. Beweis des Satzes: $K'E + KE' - KK' = \frac{\pi}{2}$ 288

§. 71. Ausdrücke für die Functionen Z und Θ mit den Argumenten iu, $iu + K$, $u + iK'$ 294

§. 72. Reduction der verschiedenen Fälle bei den Transcendenten dritter Gattung 297

§. 73. Ueber die Addition der Argumente und Parameter bei den Transcendenten dritter Gattung 300

Anhang.

Abschnitt XIX.

Ueber die Bewegung des sphärischen Pendels.

§. 74. Integration der Differentialgleichungen der Bewegung . . 304

§. 75. Untersuchung der Wurzeln einer cubischen Gleichung, von welcher die Natur der Bewegung des sphärischen Pendels abhängt 307

§. 76. Reduction der elliptischen Integrale auf die Normalform . 312

§. 77. Darstellung des Winkels ψ als Function der Zeit 317

§. 78. Darstellung des Winkels φ als Function der Zeit. Bestimmung der Bahn des sphärischen Pendels 321

§. 79. Entwickelung des Ausdrucks für den Winkel Φ 328

§. 80. Beweis, dass der Winkel Φ immer gleich oder grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist 330

Abschnitt XX.

Ueber Functionen einer complexen Variablen und die Vieldeutigkeit bestimmter Integrale.

§. 81. Der Begriff einer stetig veränderlichen complexen Grösse 335

§. 82. Function einer complexen Variablen. Die Derivirte einer solchen Function ist unabhängig von der Art der Veränderung der Variablen. Geometrische Bedeutung dieser Eigenschaft 339

§. 83. Mehrdeutige Functionen. Der Werth, den eine mehrdeutige Function in einem Punkte erhält, kann sich mit dem Wege, auf dem die Variable zu dem Punkte gelangt, ändern. Ausgezeichnete Punkte 347

§. 84. Specielle Untersuchung der Functionen $\sqrt{z}$, $\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$, $\log z$, arc tg z. Elementarcontur. Monodrome Function. Synektische Function 351

§. 85. Von den Integralen zwischen complexen Grenzen 361

§. 86. Specielle Untersuchung der Integrale

$$\int \frac{dz}{z}, \int \frac{dz}{1+z^2}, \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Zurückführung aller Integrationswege auf gerade Linien und Elementarconturen. Geometrische Darstellung der einfachen und doppelten Periodicität 371

Digitized by Google

Erster Abschnitt.

Begriff der elliptischen Functionen.

§ 1.

Die elliptischen Functionen sind eine Gattung mathematischer Gebilde, welche sich den Exponential- und trigonometrischen Functionen aufs innigste anschliessen, und zwar so, dass die letzteren beiden Gattungen als specielle Fälle in jenen enthalten sind.

Die trigonometrischen und Exponentialfunctionen besitzen in vieler Beziehung Vorzüge vor ihren Umkehrungen, den cyclometrischen Functionen und Logarithmen. Es ist bekannt, mit welcher Geschmeidigkeit sich die Sinus, Cosinus, Tangenten u. s. w. in die mannigfaltigsten Beziehungen zu einander bringen lassen, und wie dadurch diese Functionen besonders geschickt sind, analytischen Ausdrücken eine zur numerischen Berechnung bequeme Gestalt zu geben. Die Exponentialfunctionen erfreuen sich einer eben solchen Geschmeidigkeit, da sie ja in der That nichts anderes als trigonometrische Functionen von imaginären Variabeln sind; doch ist es dann nicht sowohl die einfache Exponentialfunction e^x, als vielmehr solche Combinationen wie

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

welche den trigonometrischen Functionen an die Seite zu stellen sind.

Ausser diesen allgemeinen Vorzügen besitzen die genannten Functionen noch einige besondere Eigenschaften, durch die sie sich vor ihren Umkehrungen auszeichnen:

1) Die unendlichen Reihen, in welche sie sich entwickeln lassen, convergiren für jeden beliebigen Werth der Variabeln. Es gilt dies freilich bei den trigonometrischen Functionen nur vom Sinus und Cosinus, jedoch hat man diese wohl als die Haupt-

Digitized by Google

repräsentanten der trigonometrischen Functionen anzusehen. Da Sinus und Cosinus für imaginäre Argumente in Exponentialfunctionen übergehen und umgekehrt, so convergiren diese Reihen nicht blos für alle reellen, sondern auch für alle imaginären Werthe der Variabeln.

2) Sie lassen sich in Factorenfolgen entwickeln, sowohl von einer endlichen als auch unendlichen Anzahl von Factoren.

3) Die Function der Summe zweier Variabeln lässt sich durch die Functionen der einzelnen Variabeln auf einfache Weise algebraisch ausdrücken. So ist z. B.

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$e^{(x+y)} = e^x e^y.$$

4) Sie sind periodische Functionen; und zwar ist der Index oder Modul der Periode, d. h. die Grösse, um welche man das Argument der Function vermehren oder vermindern kann, ohne dass der Werth der Function sich verändert, bei den trigonometrischen Functionen reell, nämlich 2π, bei den Exponentialfunctionen dagegen imaginär, nämlich $2\pi i$*).

5) Die Differentialquotienten der trigonometrischen und Exponentialfunctionen sind wieder Functionen derselben Art, z. B.

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d e^x}{dx} = e^x.$$

Alle diese Eigenschaften kommen den Umkehrungen, nämlich den Logarithmen und cyclometrischen Functionen, nicht zu. Untersuchen wir diese in Bezug auf die zuletzt genannte Eigenschaft, so zeigt sich, dass die Differentialquotienten der letzteren algebraische Functionen sind, z. B.

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Daraus folgt, dass die Logarithmen und cyclometrischen Functionen sich als Integrale algebraischer Functionen darstellen lassen, z. B.

$$1) \int_1^x \frac{dx}{x} = \log x; \quad 2) \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right);$$

*) Wenn keine besondere Bedeutung angegeben wird, so soll stets, wie üblich, unter π die Ludolphische Zahl, unter e die Basis der natürlichen Logarithmen und unter i die $\sqrt{-1}$ verstanden werden.

Digitized by Google

$$3) \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}; \quad 4) \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x;$$

$$5) \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x;$$

die unteren Grenzen sind dabei jedesmal so gewählt worden, dass die willkürliche Constante des unbestimmten Integrals verschwindet.

Wir wollen zunächst diese wichtige Eigenschaft einer näheren Betrachtung unterwerfen. Sieht man in den vorstehenden Integralen die obere Grenze als veränderlich an, so kann man sagen, dass die Logarithmen und cyclometrischen Functionen algebraische Integrale sind, diese Integrale als Functionen ihrer oberen Grenze betrachtet. Nun sind die trigonometrischen und Exponentialfunctionen die Umkehrungen jener; während also die letzteren sich als Integrale darstellen lassen, bilden die ersteren die veränderlichen oberen Grenzen dieser Integrale; oder mit anderen Worten: Betrachtet man in gewissen algebraischen Integralen das Integral als Function der oberen Grenze, so ist diese Function ein Logarithmus oder eine cyclometrische Function; betrachtet man aber umgekehrt bei denselben Integralen die obere Grenze als Function des Integrals, so ist eine solche Function eine Exponential- oder eine trigonometrische Function. Setzen wir in den obigen Beispielen nach der Reihe

$$1) \int_1^x \frac{dx}{x} = u, \quad 2) \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = u, \quad 3) \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = u,$$

$$4) \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = u, \quad 5) \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = u,$$

und betrachten jedesmal u als Function von x, so ist nach der Reihe

$$1)\ u = \log x, \quad 2)\ u = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),$$

$$3)\ u = \tfrac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}, \quad 4)\ u = \arcsin x, \quad 5)\ u = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Betrachtet man aber umgekehrt jedesmal x als Function von u, so ergiebt eine leichte Rechnung der Reihe nach

Digitized by Google

$$1)\ x = e^u,\quad 2)\ x = \frac{e^u - e^{-u}}{2},\quad 3)\ x = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$
$$4)\ x = \sin u,\quad 5)\ x = \operatorname{tg} u$$

Diese Betrachtungsweise ist wesentlich keine andere, als diejenige, welche z. B. bei der Einführung der Logarithmen in der elementaren Mathematik gemacht wird*).

§ 2.

Die zuletzt angestellte Betrachtung wandte *Abel* auf ein zusammengesetzteres algebraisches Integral an, nämlich auf das folgende:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = u,$$

in welchem k eine positive Constante, die kleiner als 1 ist, bedeutet**). Der wesentliche Unterschied dieses Integrals von den im vorigen § betrachteten ist der, dass es ein irrationales Integral, und die Grösse unter dem Wurzelzeichen vom 4ten Grade ist, während jene Integrale entweder rational sind, oder unter dem Wurzelzeichen eine Function des zweiten Grades haben.

---

*) Dabei entsteht allerdings eine Schwierigkeit, die hier nicht unerwähnt bleiben mag. Da nämlich die oben erwähnten Functionen von u periodische Functionen sind, sodass einem und demselben Werthe von x mehrere verschiedene Werthe von u angehören, so müssen die obigen Integrale, welche Functionen von x sind, vieldeutige Functionen sein. Nach der gewöhnlichen Definition eines bestimmten Integrals aber sieht man nicht ein, wie ein solches vieldeutig sein könne. Ueber die Hebung dieser Schwierigkeit und den Nachweis, dass bestimmte Integrale in der That vieldeutig sein können, verweisen wir auf den im Anhange behandelten Abschnitt XX, p. 335 sq.

**) *Abel* ging in seiner ersten Abhandlung über die elliptischen Functionen „Recherches sur les fonctions elliptiques" Crelle's Journ. Bd. 2 und Oeuvres complètes de N. H. Abel Tome I. No. XII. allerdings von einer etwas anderen Form aus, nämlich von dem Integral

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

Die im Text angegebene Form wurde von *Legendre* als Normalform des elliptischen Integrals erster Gattung aufgestellt. *Jacobi* ging wieder auf dieselbe zurück, und sie wurde später auch von *Abel* als Ausgangspunkt adoptirt.

Digitized by Google

Dieses Integral hatte die Mathematiker vor *Abel* schon vielfach beschäftigt. Gleich nach der Erfindung der Differential- und Integralrechnung durch *Leibnitz* und *Newton* entstand die Aufgabe, die Integrale der verschiedenen Functionen, namentlich der algebraischen Functionen, so viel als möglich auf schon bekannte Functionen zurückzuführen. Dies gelang auch mit allen rationalen algebraischen Functionen und mit denjenigen irrationalen Functionen, welche nur eine Quadratwurzel aus einem Ausdruck des zweiten Grades enthalten. Die Reduction dieser Integrale wurde theils von *Leibnitz* selbst, theils von *Jacob* und *Johann Bernoulli* ausgeführt und durch *Euler* zu einem gewissen Abschlusse gebracht. Allein bei denjenigen Integralen, die die Quadratwurzel aus einem Ausdruck enthalten, der den zweiten Grad übersteigt, gelang die Reduction auf schon bekannte Functionen nicht. Anfangs glaubte man zwar dies der Unvollkommenheit der Methoden zuschreiben zu müssen, bald aber erkannte man, dass man es in der That mit ganz neuen Functionen zu thun habe. Mit denjenigen unter diesen Integralen, deren Radical den 4ten Grad nicht übersteigt, beschäftigte sich nun zunächst *Euler*, dann aber vorzüglich *Legendre*, der diesen Integralen den Namen elliptische Functionen gab, weil die Rectification der Ellipse auf ein Integral dieser Art führt. Jetzt nennt man nach *Jacobi* diese Integrale elliptische Integrale zum Unterschiede von den eigentlichen elliptischen Functionen, von denen sogleich die Rede sein soll. *Legendre* legte seine Untersuchungen in den zwei grossen Werken „*Exercices du calcul intégral*“ und „*Traité des fonctions elliptiques*“ nieder, und zeigte darin unter anderem, dass sich alle elliptischen Integrale auf drei verschiedene Formen zurückführen lassen, welchen er die Namen Elliptisches Integral der ersten, zweiten und dritten Gattung gab.

Das oben erwähnte Integral

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}} \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

ist nun das elliptische Integral der ersten Gattung, und zwar nennt man diese Form desselben die Normalform. Von dem-

Digitized by Google

selben ist sogleich ersichtlich, dass es sich für die beiden speciellen Werthe 0 und 1 der Constanten k auf einen Arcus Sinus und einen Logarithmus reducirt; denn man hat

$$\text{für } k = 0, \quad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$\text{für } k = 1, \quad u = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Die elliptischen Integrale sind also Functionen der Art, dass sie die cyclometrischen Functionen und Logarithmen als specielle Fälle umfassen; sie sind daher den zuletzt genannten Functionen anzureihen.

Nun erkannte aber *Abel*, dass nicht sowohl die Integrale, welche die cyclometrischen Functionen und Logarithmen darstellen, sondern vielmehr ihre Umkehrungen, nämlich die trigonometrischen und Exponentialfunctionen, für die gesammte Analysis die bei weitem wichtigeren Functionen sind, und schloss daraus, dass die Umkehrung des elliptischen Integrals eine Gattung von Functionen liefern würde, wichtiger als die elliptischen Integrale selbst. In der That mussten diese umgekehrten Functionen nun die trigonometrischen und Exponentialfunctionen als specielle Fälle umfassen und daher von noch grösserer Bedeutung sein als diese.

Diese umgekehrten Functionen, die also entstehen, wenn man in dem elliptischen Integral (1) die obere Grenze x als Function des Integrals u betrachtet, sind es nun, die man elliptische Functionen nennt.

§ 3.

Legendre hatte schon gezeigt, und wir kommen darauf ausführlich zurück, dass man immer bewirken kann, dass die obere Grenze des Integrals (1) das Intervall der Werthe zwischen -1 und $+1$ nicht überschreitet. Unter dieser Voraussetzung kann man die Variable x einem Sinus gleich setzen und erhält dann, wenn man

$$x = \sin \varphi$$

annimmt,

Digitized by Google

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Hierin hatte *Legendre* den Bogen φ, nämlich die obere Grenze des Integrals, die Amplitude, und die Constante k den Modul des Integrals genannt, und um das Integral kurz zu bezeichnen, hatte er das Zeichen F gewählt und gesetzt:

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi, k) = F(\varphi),$$

wo die letztere kürzere Bezeichnung angewendet wird, wenn der Modul k nicht zweifelhaft ist.

Die Umkehrung der elliptischen Integrale oder die Einführung der eigentlichen elliptischen Functionen besteht nun darin, dass man x oder φ als Function von u ansieht. Um diese Functionen zu bezeichnen, behielt *Jacobi* (*Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* § 17) das von *Legendre* gewählte Wort Amplitude bei und setzte

$$\varphi = am\, u,$$

gesprochen: φ gleich Amplitude u. Ebenso wie das Integral u, als Function von φ angesehen, noch von dem Modul k abhängig ist, ebenso ist auch φ, als Function von u betrachtet, von k abhängig. Wenn es nothwendig ist, den Werth des Moduls anzudeuten, schreibt man entweder

$$\varphi = am\,(u, k)$$

oder fügt den Modul in Klammern hinzu, in folgender Art:

$$\varphi = am\, u \pmod{k}.$$

Betrachtet man nun in dem algebraischen Integral

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

x als Function von u, so ist, weil $x = \sin\varphi$ gesetzt war,

$$x = \sin am\, u$$

(x gleich Sinus Amplitude u), und die trigonometrischen Functionen von $am\, u$ sind es nun, die man elliptische Functionen von u nennt. Die Variable u nennt *Jacobi* das Argument der elliptischen Function.

Digitized by Google

Für den Nenner $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ des Integrals $F(\varphi)$ hatte *Legendre* ein besonderes Zeichen eingeführt, nämlich gesetzt:

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \Delta(\varphi, k) = \Delta\varphi.$$

Diese Function, die in der Theorie der elliptischen Functionen immer wieder vorkommt, ist gleichsam als eine neue trigonometrische Function zu betrachten, die dem Cosinus verwandt, allerdings aber auch noch von dem Modul k abhängig ist. Führt man aber statt φ das Argument u ein, so werden sin *am u* und cos *am u* ebenfalls von k abhängig. Es sind daher

$$\sin am\, u,\ \cos am\, u,\ \Delta am\, u$$

die drei hauptsächlichsten einfachen elliptischen Functionen, aus denen sich die vier übrigen

$$\operatorname{tg} am\, u,\ \operatorname{cotg} am\, u,\ \sec am\, u,\ \operatorname{cosec} am\, u$$

durch blosse Division ergeben*).

Neben dem Modul k hat *Legendre* noch einen andern eingeführt, den *Jacobi* stets mit k' bezeichnet, und der mit k in der Beziehung

$$k^2 + k'^2 = 1$$

steht. Da diese beiden sich zu einander verhalten, wie Sinus und Cosinus, so nennt man nach *Legendre* jeden das Complement des andern, oder auch den einen den Modul, den andern den complementären Modul.

---

*) Statt der Bezeichnungen sin *am u*, cos *am u*, Δ *am u* hat *Gudermann* in seiner „Theorie der Modularfunctionen" (auch in Crelle's Journ. Bd. 18) § 6 die kürzeren

snu, *cnu*, *dnu*

vorgeschlagen, welche man ebenfalls angewendet findet. Es hat sich bis jetzt noch keine Bezeichnungsweise der elliptischen Functionen ausschliessliche Geltung verschafft. *Briot* und *Bouquet (Théorie des fonct. doublement périodiques et, en particulier, des fonct. ell.*, Paris 1859) wenden einfach die Buchstaben λ, μ, ν an; *Schellbach (Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen*, Berlin 1864) die Buchstaben *f, g, h.* Wenngleich sich nicht leugnen lässt, dass *Jacobi's* Bezeichnung wegen ihrer Länge unbequem ist, so giebt doch andrerseits diese Bezeichnungsart allein der Eigenschaft Ausdruck, dass die drei einfachen elliptischen Functionen trigonometrische Functionen einer und derselben Grösse, *am u*, sind. Insofern nun die von *Gudermann* vorgeschlagenen Zeichen als eine blosse Abkürzung der Zeichen *Jacobi's* angesehen werden können, und an Kürze nichts zu wünschen übrig lassen, so dürften dieselben vielleicht am besten da anzuwenden sein, wo die Jacobi'sche Bezeichnung unbequem wird.

Digitized by Google

Die Function Δ wird für reelle Werthe von φ stets positiv genommen. Vergleicht man sie mit dem Cosinus, so erhellt zunächst, da

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi},\quad \Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

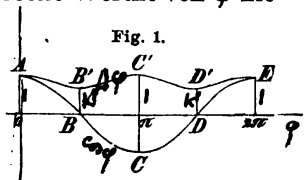
ist, dass für $\varphi = 0$ beide gleich 1 werden. Wächst dann φ, so bleibt, weil k^2 ein echter Bruch ist,

$$\Delta\varphi > \cos\varphi.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, dagegen $\Delta\frac{\pi}{2} = \sqrt{1-k^2} = k'$.

Dies ist also der kleinste Werth, den $\Delta\varphi$ annehmen kann, denn wächst nun φ über $\frac{\pi}{2}$ hinaus, so kann $\Delta\varphi$, ohne eine Unterbrechung der Stetigkeit zu erleiden, nicht ins Negative übergehen, $\Delta\varphi$ bleibt daher positiv und wird wieder grösser als k'. Hieraus folgt, dass die Function Δ für reelle Werthe von φ niemals verschwindet. Während also der Cosinus durch die Curve $ABCDE$ (Fig. 1) geometrisch dargestellt wird, giebt die Curve $AB'C'D'E$ ein Bild der Function Δ, wenn $BB' = DD' = k'$ gemacht wird.

Fig. 1.



Bemerkenswerth sind noch die Relationen

$$\Delta^2\varphi + k^2\sin^2\varphi = 1,\quad \Delta^2\varphi - k^2\cos^2\varphi = k'^2,$$

welche gewissermassen der Relation

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

analog sind.

§ 4.

Es wurde schon § 2 erwähnt, dass die elliptischen Functionen für die Werthe von 0 und 1 des Moduls k in trigonometrische oder Exponentialfunctionen übergehen. Dies ist nun leicht einzusehen. Denn für $k = 0$ hat man

$$u = \int_0^{\varphi} d\varphi = \varphi;\ \text{also}\ \varphi = am\,(u, 0) = u,\ \text{mithin}$$

$$\sin am\,(u, 0) = \sin u.$$

Digitized by Google

Für $k = 1$ aber ist

$$u = \int_0^x \frac{dx}{1 - x^2} \quad \text{und dann} \quad x = \sin am\,(u, 1).$$

Wir fanden § 1 für diesen Fall

$$x = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$

also ist

$$\sin am\,(u, 1) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}.$$

Das Integral und seine Amplitude verschwinden für jeden Werth von k gleichzeitig; daher ist

$$am\,(0, k) = 0,$$

$$\sin am\,(0, k) = 0, \quad \cos am\,(0, k) = 1, \quad \Delta am\,(0, k) = 1.$$

Nimmt ferner die Amplitude denselben Werth mit entgegengesetztem Zeichen an, so thut dies auch das Integral, also ist

$$am\,(-u) = -am\,u.$$

Die Function $am\,u$ ist daher eine ungerade Function, und es ist

$$\sin am\,(-u) = -\sin am\,u, \quad \cos am\,(-u) = \cos am\,u,$$

$$\Delta am\,(-u) = \Delta am\,u.$$

Aus den Betrachtungen des § 1 geht hervor, dass die Differentialquotienten der elliptischen Functionen wieder elliptische Functionen sein werden. Diese sind jetzt leicht zu ermitteln. Zunächst folgt aus

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$\frac{d\varphi}{du} = \Delta\varphi; \quad \text{also} \quad \frac{d\,am\,u}{du} = \Delta\,am\,u.$$

Dies zeigt, dass $am\,u$ für reelle Werthe von u eine stets mit u wachsende Function ist. Ferner hat man

$$\frac{d\sin\varphi}{d\varphi} = \cos\varphi, \quad \frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = -\sin\varphi,$$

$$\frac{d\Delta\varphi}{d\varphi} = -\frac{k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi},$$

folglich ist

$$(2) \quad \ldots \quad \begin{cases} \dfrac{d\sin am\,u}{du} = \cos am\,u\,\Delta\,am\,u \\ \dfrac{d\cos am\,u}{du} = -\sin am\,u\,\Delta\,am\,u \\ \dfrac{d\,\Delta\,am\,u}{du} = -k^2 \sin am\,u \cos am\,u. \end{cases}$$

Digitized by Google

§ 5.

Um die Anwendbarkeit der elliptischen Functionen an einem Beispiele darzuthun, wollen wir die Bewegung des ebenen Pendels untersuchen und zeigen, dass der Sinus der Amplitude diejenige Function ist, mittelst welcher die Ablenkung eines hin- und herschwingenden Pendels durch die Zeit ausgedrückt wird.

Wir betrachten hier nur das mathematische Pendel, d. h. wir untersuchen die Bewegung eines materiellen Punktes, auf den die Schwere wirkt, und der gezwungen ist, sich in einem verticalen Kreise zu bewegen.

Bezeichnet g die Acceleration der Schwere, l die Länge des Pendels, ψ den Winkel, den dasselbe mit der Verticallinie bildet, und t die Zeit, so ist bekanntlich die Differentialgleichung für die Bewegung des Pendels folgende:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Man kann hieraus ohne Hülfe der elliptischen Functionen und ohne Anwendung von unendlichen Reihen die Relation zwischen ψ und t, welche die Bewegung des Pendels darstellt, nur dann ermitteln, wenn man die Ablenkung ψ so klein annimmt, dass man den Sinus mit dem Bogen vertauschen kann. Wir nehmen dies nun nicht an, sondern setzen über die Grösse von ψ nichts voraus.

Man kann die Gleichung (3) einmal integriren, wenn man sie mit $2\frac{d\psi}{dt}$ multiplicirt; dann erhält man durch Integration

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos\psi + C \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet. Um die mechanische Bedeutung derselben einzusehen, bemerke man, dass derjenige Werth von ψ, für welchen $\frac{d\psi}{dt}$ verschwindet, ein Maximum- oder Minimumwerth des Winkels ψ ist. Bezeichnet man diesen Werth mit α, so hat man die Gleichung

$$0 = \frac{2g}{l}\cos\alpha + C,$$

aus welcher

$$C = -\frac{2g}{l}\cos\alpha, \quad \cos\alpha = -C\frac{l}{2g}$$

folgt.

$$\therefore \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\psi - \cos\alpha)$$

Digitized by Google

Da aber α nur durch den Cosinus gegeben ist, so kann man diesen Winkel ebensowohl negativ als positiv annehmen. Da alsdann die Gleichung (3) zeigt, dass der Werth des zweiten Differentialquotienten für ein positives α negativ und für ein negatives α positiv wird, so sieht man ein, dass $+\alpha$ der grösste und $-\alpha$ der kleinste Werth des Winkels ψ ist. Hieraus folgt, dass das Pendel zwischen den beiden Werthen $+\alpha$ und $-\alpha$ des Winkels ψ hin- und herschwingt. Allein hiebei ist stillschweigend vorausgesetzt, dass die willkürliche Constante C einen solchen Werth besitze, dass $\cos\alpha$ nicht kleiner als -1 und nicht grösser als $+1$ ausfalle. Es ist nun klar, dass diese Bedingung nicht immer erfüllt sein wird. Wenn sie es aber nicht ist, dann gehört dem Cosinus kein reeller Winkel α mehr an, es existirt dann kein Maximum- oder Minimumwerth des Winkels ψ, und derselbe wird, anstatt abwechselnd zu- und abzunehmen, entweder beständig zu- oder beständig abnehmen. Statt eines hin- und herschwingenden Pendels haben wir alsdann ein solches, das um die ganze Peripherie herumschwingt.

Um nun noch näher zu untersuchen, wann dies eintritt, wollen wir die Constante C durch die Anfangswerthe ausdrücken, d. h. durch diejenigen Werthe der Variabeln ψ und ihres Differentialquotienten $\frac{d\psi}{dt}$ (der Winkelgeschwindigkeit), welche irgend einem bestimmten Werthe von t angehören. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass die Zeit von dem Augenblicke an gezählt werde, in welchem das Pendel durch die Verticallinie geht, und dass in diesem Augenblicke die Winkelgeschwindigkeit den Werth v besitze; dann sind

$$\psi = 0 \text{ und } \frac{d\psi}{dt} = v$$

die Anfangswerthe, welche dem Werthe $t = 0$ zugehören. Setzt man diese in die Gleichung (4), so erhält man

$$v^2 = \frac{2g}{l} + C,$$

also

$$C = v^2 - \frac{2g}{l} \text{ und } \cos\alpha = 1 - \frac{lv^2}{2g}.$$

Hieraus erhellt, da g, l, v^2 positive Grössen sind, dass $\cos\alpha$ zwar niemals grösser als $+1$ ist, wohl aber kleiner als -1 werden kann, nämlich dann, wenn

$$lv^2 > 4g$$

Digitized by Google

ist. Nun ist lv^2 der Ausdruck für die Centrifugalkraft in dem Augenblicke, wann das Pendel durch die Verticallinie hindurchgeht. Da ausserdem cos α positiv oder negativ ist, je nachdem $lv^2 <$ oder $> 2g$, so erhält man für die Art, wie ein ebenes Pendel schwingt, folgendes Resultat:

Wenn die Centrifugalkraft eines ebenen Pendels in dem Augenblicke, da dieses durch die Verticale hindurchgeht, kleiner als die doppelte Schwere ist, so schwingt das Pendel in dem unteren Halbkreise hin und her. Ist die Centrifugalkraft grösser als die doppelte Schwere, so steigt das Pendel in den oberen Halkreis und schwingt noch hin und her, wenn die Centrifugalkraft zugleich kleiner als die vierfache Schwere ist; ist sie aber grösser als die vierfache Schwere, so läuft das Pendel um die ganze Peripherie herum.

§ 6.

Wir werden uns nun zunächst mit dem hin- und herschwingenden Pendel beschäftigen, indem wir das ganz herumschwingende einer späteren Betrachtung vorbehalten*).

Ersetzt man in der Gleichung (4) die Constante C durch den Winkel α, so erhält man

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\psi - \cos\alpha),$$

woraus

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\psi}{\sqrt{\cos\psi - \cos\alpha}},$$

und, wenn man wie oben annimmt, dass ψ und t gleichzeitig verschwinden,

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{\cos\psi - \cos\alpha}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

folgt. Dieses Integral ist nun ein elliptisches, denn setzt man $\cos\psi = x$, wodurch

$$\frac{d\psi}{\sqrt{\cos\psi - \cos\alpha}} = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x-\cos\alpha)}}$$

wird, so sieht man, dass die Grösse unter dem Wurzelzeichen

*) Siehe § 15.

Digitized by Google

vom dritten Grade ist. Um nun dieses elliptische Integral auf die Normalform zu bringen, hat man nur nöthig, statt der Variabeln ψ eine andere Variable φ mittelst der Substitution

(6) . . . . . $\sin \frac{1}{2}\psi = \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \varphi$

einzuführen. Denn dadurch erhält man

$$\cos \tfrac{1}{2}\psi = \sqrt{1 - \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha \sin^2 \varphi}; \quad d\psi = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}\alpha \sin^2 \varphi}};$$

$$\sqrt{\cos \psi - \cos \alpha} = \sqrt{2} \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \varphi$$

mithin:

$$\frac{d\psi}{\sqrt{\cos \psi - \cos \alpha}} = \frac{\sqrt{2}\, d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}\alpha \sin^2 \varphi}}.$$

Hiedurch ist die Normalform hergestellt, und der Modul des Integrals ist $\sin \frac{1}{2}\alpha$. Setzt man also

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = k,$$

so erhält man, da die Winkel ψ und φ wegen (6) gleichzeitig verschwinden, aus (5)

(7) . . . . . $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = t \sqrt{\frac{g}{l}}.$

Da nun hienach der Werth des Integrals sich gleich $t\sqrt{\frac{g}{l}}$ ergeben hat, so ist φ die Amplitude dieses Ausdruckes. Also ist

$$\varphi = am\, t \sqrt{\frac{g}{l}};$$

substituirt man dies in (6), so folgt

(8) . . . . $\sin \frac{1}{2}\psi = k \sin am\, t \sqrt{\frac{g}{l}}$,

wodurch ψ als Function der Zeit ausgedrückt ist. Es folgt daraus noch

$$\cos \tfrac{1}{2}\psi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 am\, t \sqrt{\frac{g}{l}}} = \Delta am\, t \sqrt{\frac{g}{l}},$$

also

(9) . . . . $\sin \psi = 2k \sin am\, t \sqrt{\frac{g}{l}}\ \Delta am\, t \sqrt{\frac{g}{l}}$,

$$\cos \psi = 1 - 2k^2 \sin^2 am\, t \sqrt{\frac{g}{l}},$$

und die Winkelgeschwindigkeit wegen der Formeln (2)

$$\frac{d\psi}{dt} = 2k \sqrt{\frac{g}{l}} \cos am\, t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Digitized by Google

Wir werden im Verlauf unserer Untersuchungen sehen, dass die elliptischen Functionen sich in sehr stark convergirende Reihen entwickeln lassen. Mittelst derselben kann man sie alsdann für jeden gegebenen Werth des Moduls und des Arguments berechnen. Kann man aber die Werthe von Sinus Amplitude u. s. w. aus den gegebenen Daten finden, so leuchtet ein, dass die strenge Auflösung der Pendelaufgabe gerade so einfach ist, wie die genäherte Auflösung, bei welcher die Ablenkung durch den Sinus ausgedrückt wird. Einen Vorzug für die numerische Rechnung haben allerdings die trigonometrischen Functionen, nämlich den, dass sie in ausserordentlich bequeme Tafeln gebracht sind, aus denen man ihre Werthe mit grosser Leichtigkeit entnehmen kann. Tafeln von so bequemer Einrichtung lassen sich nun wohl für die elliptischen Functionen kaum aufstellen, weil die letzteren von zwei Grössen abhängig sind, dem Argument und dem Modul; dagegen sind die Reihen für die elliptischen Functionen, besonders wenn man die sogenannte Jacobi'sche Function zu Hülfe nimmt (worüber das Nähere später), so ausserordentlich convergent, dass dieselben in vielen Fällen einfachen geschlossenen Ausdrücken gleich gesetzt werden können.

Ein Vorzug specieller Art, den die elliptischen Functionen gegenüber den elliptischen Integralen besitzen, darf hier nicht unerwähnt bleiben. Gewöhnlich ergiebt sich bei mechanischen Aufgaben schliesslich die Zeit ausgedrückt durch ein Integral, das die Coordinaten, von welchen der Ort des beweglichen Punktes abhängt, enthält. Dies ist aber nicht eigentlich das, was man wissen will; man wünscht vielmehr gerade umgekehrt die Coordinaten durch die Zeit ausgedrückt zu haben. Das vorliegende Beispiel zeigt, wie die elliptischen Functionen diese Forderung erfüllen.

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Von der Periodicität der elliptischen Functionen.

§ 7.

Wir haben gesehen, dass die elliptischen Functionen die trigonometrischen und Exponentialfunctionen als specielle Fälle in sich schliessen. Daraus kann man schon im Voraus abnehmen, dass die in § 1 erwähnten Eigenschaften, durch welche sich die trigonometrischen und Exponentialfunctionen auszeichnen, den elliptischen Functionen ebenfalls zukommen. Wir werden dies nach und nach vollständig nachzuweisen suchen. Zunächst aber wollen wir uns mit der wichtigsten unter diesen Eigenschaften beschäftigen, nämlich mit der Periodicität. Die elliptischen Functionen sind hierin besonders merkwürdig, da sie eine doppelte Periode besitzen: eine reelle, wie die trigonometrischen Functionen, und eine imaginäre, wie die Exponentialfunctionen.

Unter den verschiedenen Werthen, welche die obere Grenze eines elliptischen Integrals annehmen kann, ist der Werth $\frac{\pi}{2}$ besonders ausgezeichnet. Es soll sogleich nachgewiesen werden, dass man jedes elliptische Integral mit beliebiger Amplitude zurückführen kann auf ein Integral mit der Amplitude $\frac{\pi}{2}$ und eines, dessen Amplitude kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. Aus diesem Grunde hat *Legendre* das elliptische Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

la fonction complète genannt. Wir wollen es das vollständige Integral nennen und nach *Jacobi* mit K bezeichnen, sodass

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

ist. *Legendre* hatte dafür das Zeichen F^1 angewendet. Diese Grösse hängt, wie man sieht, nur noch von dem Modul k ab,

Digitized by Google

und wir werden später Mittel finden, sie mit Leichtigkeit für jeden Werth von k zu berechnen. Denjenigen Werth von K, welcher dem complementären Modul k' zugehört, hat *Jacobi* analog mit K' bezeichnet, so dass

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}$$

ist.

Was die Beschaffenheit von K anbetrifft, so ist zuerst klar, dass für $k = 0$, $K = \frac{\pi}{2}$ wird. Ferner ist K immer positiv, denn da das bestimmte Integral als der Grenzwerth einer Summe anzusehen ist, und $\Delta\varphi$ in der ganzen Ausdehnung des Integrals positiv bleibt und niemals verschwindet, so ist K der Grenzwerth einer Summe von lauter positiven Grössen, mithin selbst positiv. Aus demselben Grunde ist auch

$$\frac{dK}{d(k^2)} = \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}$$

immer positiv. Daher ist K für alle von 0 verschiedenen Werthe von k grösser als $\frac{\pi}{2}$ und wird zuletzt für $k = 1$ unendlich gross. Das letzte geht aus der algebraischen Form des Integrals hervor, denn, da man auch hat, $\sin\varphi = x$ gesetzt,

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

so erhält man für $k = 1$

$$K = \left[\tfrac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}\right]_{x=1} = \tfrac{1}{2} \log \frac{2}{0} = \infty.$$

Aus der Definition von K folgt nun, dass $\frac{\pi}{2}$ die Amplitude von K ist, wenn der Modul k, und die Amplitude von K', wenn der Modul k' ist; also hat man

$$am\ (K, k) = am\ (K', k') = \frac{\pi}{2}$$

und dann sogleich

$$\sin am\ K = 1,\ \cos am\ K = 0,\ \Delta am\ K = k'.$$

Digitized by Google

Hieraus ist ersichtlich, dass diese Grösse K bei den elliptischen Functionen dieselbe Rolle spielt, wie die Zahl $\frac{\pi}{2}$ in der Trigonometrie; in der That wird auch für den Fall, dass die elliptischen Functionen in trigonometrische übergehen, nämlich wenn $k = 0$ ist, $K = \frac{\pi}{2}$.

Es soll nun folgender Satz bewiesen werden: Nimmt man das Integral

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

nach und nach zwischen den Grenzen

$$0 \cdots \frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2} \cdots \pi, \ \pi \cdots \frac{3\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2} \cdots 2\pi, \text{ etc.}$$

$$-\frac{\pi}{2} \cdots 0, \ -\pi \cdots -\frac{\pi}{2}; \ -\frac{3\pi}{2} \cdots -\pi, \ -2\pi \cdots -\frac{3\pi}{2} \text{ etc.},$$

so sind alle diese Integrale einander gleich und gleich K. Um dies einzusehen, bezeichne n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, dann ist jedes der vorliegenden Integrale von einer der beiden Formen

$$\int_{\frac{2n-1}{2}\pi}^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \quad \text{oder} \quad \int_{n\pi}^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Setzt man aber in dem ersteren Integrale

$$\varphi_1 = n\pi - \varphi,$$

so erhält man

$$\int_{\frac{2n-1}{2}\pi}^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} = K,$$

und setzt man in dem zweiten Integral

$$\varphi_1 = \varphi - n\pi,$$

so erhält man

$$\int_{n\pi}^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} = K.$$

Digitized by Google

Ein elliptisches Integral, dessen Grenzen zwei auf einander folgende Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ sind, hat also stets den Werth K. Bildet man daher nun ein elliptisches Integral, dessen untere Grenze Null, und dessen obere Grenze ein beliebiges Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist, so ist der Werth desselben ein Vielfaches von K. Denn es ist:

$$\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \cdots\cdots + \int_{(n-1)\frac{\pi}{2}}^{n\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = nK.$$

Nun ist $n\frac{\pi}{2}$ die Amplitude des Integrals, dessen Werth nK ist, mithin hat man

$$n\,\frac{\pi}{2} = am\,(nK),$$

oder weil $\frac{\pi}{2} = am\,K$ ist,

$$am\,(nK) = n \cdot am\,K.$$

Es ist also der Reihe nach:

$$\frac{\pi}{2} = am\,K$$
$$\pi = am\,2K = 2 \cdot am\,K$$
$$\frac{3\pi}{2} = am\,3K = 3 \cdot am\,K$$
$$2\pi = am\,4K = 4 \cdot am\,K$$

u. s. w.

Betrachten wir jetzt ein elliptisches Integral mit der beliebigen Amplitude α, so kann man, wenn β einen Bogen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet, entweder

$$\alpha = n\pi + \beta \text{ oder } \alpha = n\pi - \beta$$

setzen, je nachdem das grösste in α enthaltene Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle ist

$$\int_0^{n\pi+\beta} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_{n\pi}^{n\pi+\beta} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

Digitized by Google

oder, wenn man

$$\varphi_1 = \varphi - n\pi$$

setzt,

$$\int_0^{n\pi+\beta} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2nK + \int_0^{\beta} \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1}.$$

Im zweiten Falle erhält man

$$\int_0^{n\pi-\beta} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int_{n\pi-\beta}^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

und wenn man hier

$$\varphi_1 = n\pi - \varphi$$

setzt,

$$\int_0^{n\pi-\beta} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2nK - \int_0^{\beta} \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1},$$

so dass man, beide Fälle umfassend, auch schreiben kann:

$$\int_0^{n\pi\pm\beta} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2nK \pm \int_0^{\beta} \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1}.$$

Hierdurch ist das Integral mit beliebiger Amplitude auf das vollständige Integral K und ein Integral, dessen Amplitude zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, zurückgeführt.

Setzt man jetzt:

$$\int_0^{\beta} \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} = u, \text{ also } \beta = am\, u,$$

so ist

$$\int_0^{n\pi\pm\beta} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2nK \pm u,$$

folglich

$$n\pi \pm \beta = am\,(2nK \pm u)$$

oder

$$am\,(2nK \pm u) = n\pi \pm am\, u = 2n \cdot am\, K \pm am\, u,$$

oder auch, weil $am\,(-z) = -am\, z$ ist,

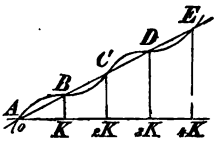
$$am\,(u \pm 2nK) = am\, u \pm n\pi.$$

Die vorstehenden Betrachtungen setzen uns in den Stand,

Digitized by Google

von dem Verlaufe der Function Amplitudo, wenigstens für reelle Argumente, eine Vorstellung zu gewinnen. Betrachtet man die Werthe von $am\,u$ als die Ordinaten einer Curve, deren Abscissen die zugehörigen Werthe von u sind, so entsprechen den Abscissen 0, K, $2K$, $3K$, $4K$, etc. die Ordinaten 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, etc. Die zugehörigen Puncte der Curve, A, B, C, D, E etc. (Fig. 2) liegen daher auf einer durch den Anfangspunct A gehenden Geraden. Da nun ferner $\frac{d \cdot am\,u}{du} = \Delta\,am\,u$ ist und daher für $u = 0$ und $= K$ die Werthe 1 und k' annimmt, so steigt die Curve im Puncte A unter einem Winkel von 45^0 an und vermindert allmälig ihre Steigung, bis im Puncte B die Tangente ihrer Neigung gegen die Abscissenaxe gleich k' geworden ist. Alsdann folgt aus der Gleichung

Fig. 2.



$$am\,(2K - u) = \pi - am\,u,$$

dass das Stück BC dem Stücke AB congruent ist, nur eine umgekehrte Lage erhalten hat, und aus der Gleichung

$$am\,(2K + u) = \pi + am\,u,$$

dass die Curvenstücke CDE und ABC gleichliegend congruent sind. In dieser Weise setzt sich die Curve nach beiden Seiten ins Unendliche fort.

Die Periodicität der elliptischen Functionen folgt nun aus dem Vorhergehenden unmittelbar. Denn da

$$\sin\,(am\,u \pm 2\pi) = \sin\,am\,u$$

und

$$am\,u \pm 2\pi = am\,(u \pm 4K),$$

so folgt

$$\sin\,am\,(u \pm 4K) = \sin\,am\,u:$$

Also: Die elliptischen Functionen bleiben unverändert, wenn man ihr Argument um die Grösse $4K$ vermehrt oder vermindert.

Aus denselben Betrachtungen folgt aber auch, weil

$$\sin\,(\varphi \pm \pi) = -\sin\,\varphi$$

ist, sogleich

$$\sin\,am\,(u \pm 2K) = -\sin\,am\,u,$$

Digitized by Google

und wendet man dies auch auf Cosinus und Delta an, so erhält man vollständig die Formeln

$$(10)\begin{cases}\sin am(u\pm 4K)=\sin am\,u, & \sin am(u\pm 2K)=-\sin am\,u,\\ \cos am(u\pm 4K)=\cos am\,u, & \cos am(u\pm 2K)=-\cos am\,u,\\ \Delta\, am\,(u\pm 4K)=\Delta\, am\,u, & \Delta\, am\,(u\pm 2K)=\Delta\, am\,u,\end{cases}$$

aus denen für $u=0$

$$\begin{aligned}\sin am\,4K&=0, & \sin am\,2K&=\;\;0\\ \cos am\,4K&=1, & \cos am\,2K&=-1\\ \Delta\, am\,4K&=1, & \Delta\, am\,2K&=\;\;1\end{aligned}$$

folgt.

Die Periode der elliptischen Functionen ist, wie man sieht, nicht eine absolute Zahl, wie die der trigonometrischen Functionen, sondern hängt von dem Modul ab. Ist daher der letztere nicht k sondern k', so ist auch der Index der Periode nicht $4K$, sondern $4K'$. Also hat man z. B.

$$\sin am\,(u\pm 4K',\,k')=\sin am\,(u,\,k').$$

Es verdient ferner hervorgehoben zu werden, dass, wenn man überall nach dem kleinsten Werthe des Periodicitätsindex fragt, dieser sich für die Functionen $tg\ am\,u$ und $\Delta\ am\,u$ nur halb so gross, wie der der allgemeinen Periodicität, ergiebt, nämlich $2K$, indem man nach (10) hat:

$$tg\ am\,(u\pm 2K)=tg\ am\,u,\quad \Delta\ am\,(u\pm 2K)=\Delta\ am\,u.$$

§ 8.

Die elliptischen Functionen besitzen ausser dieser reellen Periode noch eine zweite, eine imaginäre. Um diese zu ermitteln, müssen wir zuerst die elliptischen Functionen mit rein imaginärem Argumente auf die Form complexer Grössen bringen. Zu dem Ende nehmen wir in dem Integral

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

die Amplitude imaginär an und setzen

$$\sin\varphi=i\,tg\,\psi;$$

dann wird

$$(11)\ \ldots\ \cos\varphi=\frac{1}{\cos\psi},\quad \Delta\varphi=\frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}{\cos\psi}=\frac{\Delta(\psi,k')}{\cos\psi},$$

$$d\varphi=i\,\frac{d\psi}{\cos\psi},$$

Digitized by Google

mithin, da auch ψ und φ gleichzeitig verschwinden,

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = i \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k')}. \quad *)$$

Setzt man nun

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k')} = u, \quad \text{also} \quad \psi = am\,(u, k'),$$

so wird

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = i\,u, \quad \text{also} \quad \varphi = am\,(iu),$$

und substituirt man dies in die Formeln (11), so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \sin am\,iu &= i\,\mathrm{tg}\,am\,(u, k') \\ \cos am\,iu &= \frac{1}{\cos am\,(u, k')} \\ \Delta\,am\,iu &= \frac{\Delta\,am\,(u, k')}{\cos am\,(u, k')} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

Diese Formeln zeigen ein merkwürdiges Verhalten der elliptischen Functionen: während nämlich die trigonometrischen und Exponentialfunctionen für imaginäre Argumente in einander übergehen, verwandeln sich die elliptischen Functionen für imaginäre Argumente in ebensolche Functionen, deren Modul jedoch das Complement des ursprünglichen Moduls ist.

*) Ueber die nähere Bedeutung eines Integrals mit imaginärer Variable verweisen wir auf den Anhang. Vorläufig sei Folgendes bemerkt. Setzt man $\sin\varphi = x$ und $\sin\psi = y$, so lautet die angewendete Substitutionsformel

$$x = i\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Nimmt man nun y reell und kleiner als 1 an, so ist x rein imaginär von der Form iz, und z durchläuft alle reellen Werthe von 0 bis $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$. Die Rechnung zeigt dann, dass das gegebene Integral, nämlich

$$\int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}} \quad \text{in} \quad i \int_0^{y} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-k'^2y^2)}}$$

übergeht. Das Integral wird demnach ebenfalls rein imaginär, und zwar gleich i, multiplicirt mit einem reellen Integral, in welchem die Variable alle reellen Werthe von 0 bis y durchläuft.

Digitized by Google

Aus den Formeln (12) ergiebt sich nun die zweite imaginäre Periode der elliptischen Functionen. Da nämlich die rechten Theile dieser Formeln den Modul k' haben, so bleiben sie wegen der reellen Periodicität unverändert, wenn man in ihnen $u \pm 4K'$ statt u setzt. Thut man dies, so erhält man

$$\sin am\,(iu \pm 4iK') = i\,\mathrm{tg}\,am\,(u, k') = \sin am\,iu$$

$$\cos am\,(iu \pm 4iK') = \frac{1}{\cos am\,(u, k')} = \cos am\,iu$$

$$\Delta\,am\,(iu \pm 4iK') = \frac{\Delta\,am\,(u, k')}{\cos am\,(u, k')} = \Delta\,am\,iu.$$

Setzt man also wiederum u statt iu, so ergiebt sich

$$(13)\ \ldots\ \begin{cases} \sin am\,(u \pm 4iK') = \sin am\,u \\ \cos am\,(u \pm 4iK') = \cos am\,u \\ \Delta\,am\,(u \pm 4iK') = \Delta\,am\,u. \end{cases}$$

Der Index der imaginären Periode ist also $4iK'$, wenn der Modul k ist, und daher $4iK$, wenn der Modul k' ist.

Setzt man ebenso in den Formeln (12) $u \pm 2K'$ statt u und verfährt auf dieselbe Weise wie vorher, so erhält man mit Berücksichtigung der Formeln (10)

$$(14)\ \ldots\ \begin{cases} \sin am\,(u \pm 2iK') = \sin am\,u \\ \cos am\,(u \pm 2iK') = -\cos am\,u \\ \Delta\,am\,(u \pm 2iK') = -\Delta\,am\,u. \end{cases}$$

Daraus ergiebt sich für $u = 0$

$$\begin{aligned} \sin am\,4iK' &= 0, & \sin am\,2iK' &= 0, \\ \cos am\,4iK' &= 1, & \cos am\,2iK' &= -1, \\ \Delta\,am\,4iK' &= 1, & \Delta\,am\,2iK' &= -1. \end{aligned}$$

Endlich kann man die beiden Perioden auch mit einander verbinden, indem man in den Gleichungen (13) und (14) aufs neue resp. $u \pm 4K$ und $u \pm 2K$ statt u setzt, dann erhält man

$$\begin{aligned} \sin am\,(u \pm 4K \pm 4iK') &= \sin am\,u \\ \cos am\,(u \pm 4K \pm 4iK') &= \cos am\,u \\ \Delta\,am\,(u \pm 4K \pm 4iK') &= \Delta\,am\,u \\ \sin am\,(u \pm 2K \pm 2iK') &= -\sin am\,u \\ \cos am\,(u \pm 2K \pm 2iK') &= +\cos am\,u \\ \Delta\,am\,(u \pm 2K \pm 2iK') &= -\Delta\,am\,u \end{aligned}$$

Digitized by Google

und dann für $u = 0$

$$\begin{aligned} &\sin am\,(4K \pm 4iK') = 0, \quad \sin am\,(2K \pm 2iK') = \quad 0,\\ &\cos am\,(4K \pm 4iK') = 1, \quad \cos am\,(2K \pm 2iK') = \quad 1,\\ &\Delta am\,(4K \pm 4iK') = 1, \quad \Delta am\,(2K \pm 2iK') = -1. \end{aligned}$$

Dabei sind noch zwei Bemerkungen zu machen. Ebenso wie nämlich in der Trigonometrie bei der Tangente der Index der Periode halb so gross ist wie bei den übrigen Functionen, so haben auch hier ausser den allgemeinen Perioden $4K$, $4iK$, $4K \pm 4iK'$ die Functionen Tangens Amplitude und Delta Amplitude noch die Periode $2K$, Sinus Amplitude noch die Periode $2iK'$ und Cosinus Amplitude noch die Periode $2K \pm 2iK'$. Die kleinsten Werthe für die Periodicitätsindices der einzelnen Functionen sind demnach folgende:

für $\sin am\,u$ . . . . $4K$ . . und $2iK'$,
- $\cos am\,u$ . . . . $4K$ . . - $2K + 2iK'$,
- $\Delta am\,u$ . . . . $2K$ - $4iK'$,
- $\operatorname{tg} am\,u$ . . . . $2K$ - $4iK'$.

Zweitens ist darauf aufmerksam zu machen, dass wir hier für gewisse imaginäre Argumente negative Werthe der Function $\Delta am\,u$ erhalten.

§ 9.

Wir wollen nun zunächst die gewonnenen Resultate auf die Pendelaufgabe anwenden. Aus der Gleichung (6) § 6

$$\sin \tfrac{1}{2}\psi = \sin \tfrac{1}{2}\alpha \sin \varphi$$

folgt, dass für den Werth $\frac{\pi}{2}$ von φ, ψ den Werth α annimmt; bezeichnet nun T den Zeitraum, der verfliesst, während ψ von 0 bis α wächst, d. h. während das Pendel sich aus der Verticallinie bis zu seiner grössten Ablenkung bewegt; mit andern Worten, bedeutet T die halbe Schwingungsdauer, so erhält man aus (7)

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = K \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass die Schwingungsdauer nicht von der grössten Ablenkung unabhängig ist, sondern vielmehr mit derselben wächst, wie dies mit der Erfahrung übereinstimmt.

Digitized by Google

Setzt man nun in der Formel (8)

$$\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{K}{T},$$

so erhält man

$$\sin \tfrac{1}{2}\psi = \sin \tfrac{1}{2}\alpha \sin am \frac{K}{T} t.$$

So oft nun die Zeit um T wächst, wächst das Argument der Amplitude um K. Daher entsprechen

den Werthen $0,\ T,\ 2T,\ 3T,\ 4T,$ etc. von t

resp. die Werthe $0,\ K,\ 2K,\ 3K,\ 4K,$ etc. von $\frac{K}{T} t,$

und die Werthe $0,\ \alpha,\ 0,\ -\alpha,\ 0,$ etc. von $\psi.$

Zweien Zeiten ferner, welche um $2T$ aus einander liegen, entsprechen zwei Werthe von $\frac{K}{T} t$, die um $2K$ von einander verschieden sind. Ihnen gehören also zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von $\sin am \frac{K}{T} t$ und daher auch zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von ψ an. Ebenso entsprechen zweien Zeiten, die um $4T$ aus einander liegen, zwei gleiche Werthe von ψ.

§ 10.

Wir gehen nun dazu über, diejenigen Relationen zwischen elliptischen Functionen aufzusuchen, welche den trigonometrischen Formeln

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi,\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$$

analog sind. Dazu bedürfen wir einer Transformation, die, wie wir später sehen werden*), mit der Substitution $\sin\varphi = i\,\mathrm{tg}\,\psi$ aus derselben Quelle fliesst.

Wir setzen jetzt in dem Integral $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$

$$(15)\quad \cdots \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{\cos\psi}{\Delta\psi}, \text{ dann folgt} \\ \cos\varphi = \dfrac{k' \sin\psi}{\Delta\psi}, \quad \Delta\varphi = \dfrac{k'}{\Delta\psi}, \end{cases}$$

$$\cos\varphi\, d\varphi = -\frac{k'^2 \sin\psi}{\Delta^3\psi}\, d\psi;$$

*) Vgl. Abschnitt V.

Digitized by Google

mithin

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\frac{d\psi}{\Delta\psi}.$$

Da aber jetzt $\psi = \frac{\pi}{2}$ für $\varphi = 0$ wird, so erhält man:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta\psi} = \int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\Delta\psi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\Delta\psi} - \int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta\psi},$$

also

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = K - \int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}.$$

Setzt man nun

$$\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta\psi} = u, \quad \text{also} \quad \psi = am\, u,$$

so ist

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = K - u, \quad \text{also} \quad \varphi = am\,(K-u),$$

und substituirt man dies in die Formeln (15), so ergeben sich die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} \sin am\,(K-u) &= \frac{\cos am\, u}{\Delta\, am\, u}, \quad \cos am\,(K-u) = \frac{k'\sin am\, u}{\Delta\, am\, u}, \\ \Delta\, am\,(K-u) &= \frac{k'}{\Delta\, am\, u} \end{aligned}\right\} \ldots (16)$$

Jacobi hat für die Function $am\,(K-u)$ noch eine andere Bezeichnung eingeführt. Weil nämlich die Grösse K sich zu einem beliebigen Argument u ähnlich verhält, wie $\frac{\pi}{2}$ zu einem beliebigen Bogen φ, so hat *Jacobi* die Amplitude von $K-u$ das Complement der Amplitude von u oder die Coamplitude von u genannt und demgemäss gesetzt

$$am\,(K-u) = coam\, u.$$

Mit dieser Bezeichnung kann man die vorigen Formeln auch so schreiben:.

$$\sin coam\, u = \frac{\cos am\, u}{\Delta\, am\, u}, \quad \cos coam\, u = \frac{k'\sin am\, u}{\Delta\, am\, u},$$

$$\Delta\, coam\, u = \frac{k'}{\Delta\, am\, u}.$$

Man könnte aus diesen Formeln, indem man $u = 0$ setzt, die Werthe von $\sin am\, K$, $\cos am\, K$, $\Delta\, am\, K$ nochmals ab-

Digitized by Google

leiten. Da wir aber diese schon kennen, so wollen wir, indem wir $u = \frac{K}{2}$ setzen, die Werthe der elliptischen Functionen für dieses Argument ermitteln. Man erhält dann

$$\sin \operatorname{am} \frac{K}{2} = \frac{\cos am \frac{K}{2}}{\Delta\, am \frac{K}{2}}, \qquad \cos am \frac{K}{2} = \frac{k' \sin am \frac{K}{2}}{\Delta\, am \frac{K}{2}},$$

$$\Delta\, am \frac{K}{2} = \frac{k'}{\Delta\, am \frac{K}{2}}$$

und daraus

$$\sin am \frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}, \quad \cos am \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}, \quad \Delta\, am \frac{K}{2} = \sqrt{k'},$$

$$\operatorname{tg} am \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{1}{k'}},$$

also auch

$$am \frac{K}{2} = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1}{k'}}.$$

Aus den Formeln (16) ergeben sich sogleich die entsprechenden für $K + u$, wenn man $-u$ statt u setzt; führt man ausserdem noch $u - K$ statt $K - u$ ein, so ergiebt sich:

$$(17) \quad \cdots \quad \begin{cases} \sin am (u \pm K) = \pm \frac{\cos am\, u}{\Delta\, am\, u} \\ \cos am (u \pm K) = \mp \frac{k' \sin am\, u}{\Delta\, am\, u} \\ \Delta\, am (u \pm K) = + \frac{k'}{\Delta\, am\, u}, \end{cases}$$

worin die oberen und unteren Zeichen einander entsprechen. Wendet man nun diese Formeln nochmals an und zieht auch die Formeln (12) zu Hülfe, so erhält man Ausdrücke für die elliptischen Functionen der Argumente $iu + K$, $u + iK'$, $u + K + iK'$ und $iu + K + iK'$.

Setzt man zuerst in (17) iu statt u und wendet (12) an, so erhält man

$$(18) \quad \cdots \quad \begin{cases} \sin am (iu \pm K) = \pm \frac{1}{\Delta\, am (u, k')} \\ \cos am (iu \pm K) = \mp \frac{i k' \sin am (u, k')}{\Delta\, am (u, k')} \\ \Delta\, am (iu \pm K) = + \frac{k' \cos am (u, k')}{\Delta\, am (u, k')}. \end{cases}$$

Setzt man ferner in (12) $u \pm K'$ statt u und wendet (17) an,

Digitized by Google

indem man K' mit K, also auch k mit k' vertauscht, so erhält man:

$$\sin am\,(iu \pm iK') = -\frac{i\cos am\,(u,k')}{k\sin am\,(u,k')}$$
$$\cos am\,(iu \pm iK') = \mp\frac{\Delta am\,(u,k')}{k\sin am\,(u,k')}$$
$$\Delta am\,(iu \pm iK') = \mp\frac{1}{\sin am\,(u,k')}.$$

Drückt man aber wiederum mittelst (12) die elliptischen Functionen mit dem Modul k' durch solche mit dem Modul k aus, und setzt alsdann u statt iu, so erhält man

$$\sin am\,(u \pm iK') = +\frac{1}{k\sin am\,u}$$
$$\cos am\,(u \pm iK') = \mp\frac{i\,\Delta am\,u}{k\sin am\,u}$$
$$\Delta am\,(u \pm iK') = \mp i\cot g\,am\,u.$$

Setzt man in diesen Formeln $u = 0$, so ergiebt sich, dass die Ausdrücke

$$\sin am\,(\pm iK'),\ \cos am\,(\pm iK'),\ \Delta am\,(\pm iK')$$

unendlich gross sind.

In den vorigen Formeln substituiren wir nun wieder $u + K$ und $u - K$ statt u, dann ergiebt sich mit Hülfe von (17)

$$\sin am\,(u + K \pm iK') = +\frac{\Delta am\,u}{k\cos am\,u}$$
$$\cos am\,(u + K \pm iK') = \mp\frac{ik'}{k\cos am\,u}$$
$$\Delta am\,(u + K \pm iK') = \pm ik'\,\mathrm{tg}\,am\,u$$

und

$$\sin am\,(u - K \pm iK') = -\frac{\Delta am\,u}{k\cos am\,u}$$
$$\cos am\,(u - K \pm iK') = \pm\frac{ik'}{k\cos am\,u}$$
$$\Delta am\,(u - K \pm iK') = \pm ik'\,\mathrm{tg}\,am\,u$$

woraus für $u = 0$ folgt

$$\left.\begin{aligned}\sin am\,(K \pm iK') &= \frac{1}{k}\\ \cos am\,(K \pm iK') &= \mp\frac{ik'}{k}\\ \Delta am\,(K \pm iK') &= 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Es ist also $K + iK'$, abgesehen von den Perioden, derjenige Werth von u, für welchen $\Delta am\,u$ verschwindet.

Digitized by Google

Endlich setzen wir noch in den beiden letzten Formelsystemen iu statt u, und wenden wieder (12) an, so ergiebt sich:

$$\sin am\,(iu + K \pm iK') = + \frac{\Delta\, am\,(u, k')}{k}$$

$$\cos am\,(iu + K \pm iK') = \mp \frac{ik' \cos am\,(u, k')}{k}$$

$$\Delta\, am\,(iu + K \pm iK') = \mp k' \sin am\,(u, k')$$

und

$$\sin am\,(iu - K \pm iK') = - \frac{\Delta\, am\,(u, k')}{k}$$

$$\cos am\,(iu - K \pm iK') = \pm \frac{ik' \cos am\,(u, k')}{k}$$

$$\Delta\, am\,(iu - K \pm iK') = \mp k' \sin am\,(u, k').$$

Vergleicht man diese grosse Menge von Formeln mit den beiden ihnen entsprechenden trigonometrischen, so lässt sich der Reichthum von analytischen Beziehungen nicht verkennen, den die elliptischen Functionen darbieten.

Eine Eigenthümlichkeit, die diese Formeln zeigen, verdient noch besonders hervorgehoben zu werden, nämlich die, dass überall die Ausdrücke für Sinus, Cosinus und Delta bei allen drei Functionen denselben Nenner haben, abgesehen von einer Constanten. Dies ist natürlich nicht zufällig, sondern hat darin seinen Grund, dass die drei Functionen Sinus, Cosinus und Delta gleichzeitig unendlich werden, wie aus den Formeln

$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi;\ \Delta^2 \varphi = 1 - k^2 \sin^2 \varphi$$

leicht erhellt, nämlich, wie wir oben fanden, für die beiden Werthe

$$u = \pm iK'.$$

Ausserdem haben obige Formeln als Transformationsformeln grosse Bedeutung, weil man mit ihrer Hülfe durch Substitution der Argumente $u + K$, $u + iK'$, etc. an Stelle von u leicht von einer elliptischen Function zu einer andern übergehen kann.

Digitized by Google

Dritter Abschnitt.

Von der Reduction der elliptischen Integrale auf die Normalform.

§ 11.

Die Einführung der elliptischen Functionen durch Umkehrung des elliptischen Integrals beruht, wie wir gesehen haben, wesentlich auf einer gewissen einfachen Form des letzteren, die man die Normalform nennt, nämlich die Form

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi)$$

Wir haben ferner in dem Beispiele von der Bewegung des ebenen Pendels gesehen, dass das elliptische Integral sich nicht immer von selbst in der gewünschten Form darbietet, sondern erst durch geeignete Substitutionen auf dieselbe zurückgeführt werden muss, und dass dann die Substitutionsformel von der grössten Wichtigkeit ist, indem z. B. bei der Pendelaufgabe von ihr der Ausdruck, durch welchen die Ablenkung ψ durch die Zeit ausgedrückt wird, abhängt. Es ist daher nun von Wichtigkeit, zu zeigen, dass und wie man jedes beliebige elliptische Integral auf eine oder mehrere von drei bestimmten einfachen Formen reduciren kann, die man nach *Legendre* die elliptischen Integrale der ersten, zweiten und dritten Gattung nennt. Das bis jetzt betrachtete Integral

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

durch dessen Umkehrung die elliptischen Functionen entstanden, bildet die erste Gattung.

Aus der Integralrechnung ist bekannt, dass man das Integral einer jeden algebraischen rationalen und jeder solchen irrationalen Function, die auf ihre einfachste Gestalt gebracht, nur die Quadratwurzel aus einem Ausdrucke des ersten oder zweiten Grades enthält, auf algebraische, cyclometrische

Digitized by Google

Functionen oder Logarithmen zurückführen kann. Uebersteigt jedoch die Grösse unter dem Quadratwurzelzeichen den zweiten Grad, so ist die Reduction auf die genannten Functionen nicht mehr möglich, vielmehr hat man es dann mit wesentlich neuen Functionen zu thun. Elliptische Integrale, im weitesten Sinne des Wortes genommen, nennt man nun die Integrale solcher algebraischer irrationaler Functionen, die eine Quadratwurzel aus einem Ausdruck entweder des dritten oder des vierten Grades enthalten. Wir werden später sehen, dass der erstere Fall, wenn das Radical vom dritten Grade ist, sich als ein specieller Fall davon, dass es vom vierten Grade ist, ansehen lässt. Bezeichnet man daher mit R eine Wurzelgrösse vierten Grades

$$R = \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E},$$

und mit f eine algebraische rationale Function, so ist

$$\int f(x, R)\, dx$$

die allgemeinste Form eines elliptischen Integrals.

Bezeichnen nun $M, M', M'', \ldots; P, P', P'', \ldots$ rationale Functionen von x, so ist

$$\frac{M + M'R + M''R^2 + M'''R^3 + \cdots}{P + P'R + P''R^2 + P'''R^3 + \cdots}$$

die allgemeinste Form der Function f, die sich, weil sämmtliche geraden Potenzen von R rationale Functionen von x sind, und sämmtliche ungeraden Potenzen von R sich als Producte aus R in rationale Functionen von x darstellen lassen, auf die Form

$$\frac{m + m'R}{p + p'R}$$

reducirt, worin m, m', p, p' wiederum rationale Functionen von x bedeuten. Jedes elliptische Integral lässt sich hienach auf die Form

$$\int \frac{m + m'R}{p + p'R}\, dx$$

bringen. Multiplicirt man den in diesem Integral enthaltenen Bruch im Zähler und Nenner mit $p - p'R$, so erhält man

$$\int \frac{mp - m'p'R^2 + (m'p - mp')R}{p^2 - p'^2R^2}\, dx.$$

Digitized by Google

Setzt man aber

$$\frac{m\,p - m'\,p'\,R^2}{p^2 - p'^2\,R^2} = L, \quad \frac{m'\,p - m\,p'}{p^2 - p'^2\,R^2} = N,$$

so sind L und N wiederum rationale Functionen von x, und es wird

$$\int f(x, R)\,dx = \int L dx + \int NR dx.$$

Hiernach zerlegt sich ein elliptisches Integral im Allgemeinen in zwei Theile, von denen der eine, $\int L\,dx$, da er ein Integral einer rationalen Function ist, durch eine algebraische, eine cyclometrische Function, oder einen Logarithmus ausgedrückt werden kann, der andere, $\int NR dx$, dagegen ein elliptisches Integral ist. Natürlich wird es häufig vorkommen, dass die Function L Null ist, sodass alsdann der Theil des Integrals, der nicht elliptisch ist, verschwindet. Wir haben es nun bloss mit dem zweiten Theile zu thun, der sich auch

$$\int \frac{NR^2}{R}\,dx$$

schreiben lässt, oder wenn man

$$NR^2 = F(x)$$

setzt, die Form

$$\int \frac{F(x)\,dx}{R}$$

hat, wo jetzt $F(x)$ eine algebraische rationale Function von x bedeutet.

Von der Beschaffenheit der Function $F(x)$ hängt es nun ab, welcher der drei Gattungen das elliptische Integral angehört, und es sei darüber gleich so viel bemerkt, dass, wenn die Function F nur eine Constante ist, man die erste Gattung erhält; enthält aber $F(x)$ wirklich x, so wird man auf die zweite oder dritte Gattung geführt; es kann aber auch der Fall eintreten, dass das Integral aufhört, ein elliptisches zu sein.

§ 12.

Wir behandeln zuerst den Fall, dass $F(x)$ eine Constante ist, beschäftigen uns also mit dem Integral

$$\int \frac{dx}{R} = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}}.$$

Digitized by Google

Stellt man die Gleichung

$$R^2 = 0$$

auf, so hat dieselbe, da sie vom 4ten Grade ist, entweder 4 reelle, oder 2 reelle und 2 imaginäre, oder 4 imaginäre Wurzeln. Wir nehmen diese Wurzeln als bekannt an und bezeichnen sie mit

$$p,\ q,\ \pi,\ \varkappa,$$

wobei in dem Falle, dass imaginäre Wurzeln vorhanden sind, p dem q, und π dem $\varkappa$ conjugirt sein möge. Es sei ferner

$$(x-p)\ (x-q)\ (x-\pi)\ (x-\varkappa) = R'^2,$$

also auch

$$R^2 = A \cdot R'^2.$$

Wie auch die Wurzeln beschaffen sein mögen, man kann stets R'^2 in zwei reelle quadratische Factoren zerfällen, also setzen

$$R'^2 = [(x-m)^2 + n]\ [(x-\mu)^2 + \nu].$$

Durch die Wurzeln ausgedrückt, ist dann

$$(x-m)^2 + n = (x-p)\ (x-q),$$
$$(x-\mu)^2 + \nu = (x-\pi)\ (x-\varkappa),$$

woraus

$$(1)\quad \ldots \quad \begin{cases} m = \frac{p+q}{2}, & \mu = \frac{\pi+\varkappa}{2}, \\ n = -\left(\frac{p-q}{2}\right)^2, & \nu = -\left(\frac{\pi-\varkappa}{2}\right)^2 \end{cases}$$

folgt. Daraus geht hervor, dass m, n, μ, ν in der That reell sind, und ferner, dass n und ν negativ oder positiv ausfallen, je nachdem resp. p, q und π, $\varkappa$ reell oder imaginär sind.

Die erste zu erfüllende Forderung ist nun die, den Ausdruck R'^2 in einen ähnlichen umzuformen, der aber die ungeraden Potenzen der Veränderlichen nicht mehr enthält. Dies kann auf sehr verschiedene Weise und namentlich durch Substitutionen von sehr verschiedener Ordnung geschehen. Wir wollen hier nur eine Substitution der ersten Ordnung, und für den Fall, dass alle vier Wurzeln reell sind, ihrer häufigen Anwendung wegen, im Abschnitt V. eine Substitution der zweiten Ordnung benutzen. Dabei folgen wir dem von *Richelot* in der Abhandlung: „Ueber die Substitutionen der ersten Ordnung und die Umformung der elliptischen Integrale

Digitized by Google

in die Normalform“ (Crelle's Journ. Bd. 34) eingehaltenen Gange.

Setzt man

$$\frac{x-m}{x-\mu} = \frac{r-sy}{\varrho-\sigma y}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

so hat man 4 Grössen, r, s, ϱ, σ, über die man so verfügen kann, dass der Ausdruck R'^2, durch y ausgedrückt, die ungeraden Potenzen von y nicht enthält.

Aus (2) folgt zunächst

$$\frac{x-m}{m-\mu} = \frac{r-sy}{\varrho-r-(\sigma-s)y}; \quad \frac{x-\mu}{m-\mu} = \frac{\varrho-\sigma y}{\varrho-r-(\sigma-s)y}, \quad (3)$$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned} R'^2 = \frac{(m-\mu)^2(r-sy)^2 + n[\varrho-r-(\sigma-s)y]^2}{[\varrho-r-(\sigma-s)y]^2} \\ \frac{(m-\mu)^2(\varrho-\sigma y)^2 + \nu[\varrho-r-(\sigma-s)y]^2}{[\varrho-r-(\sigma-s)y]^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

Soll nun in beiden Factoren das in y multiplicirte Glied verschwinden, so erhält man zur Bestimmung von r, s, ϱ, σ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (m-\mu)^2 rs + n(\varrho-r)(\sigma-s) = 0 \\ (m-\mu)^2 \varrho\sigma + \nu(\varrho-r)(\sigma-s) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Da dies nur zwei Gleichungen sind, so bleiben zwei der zu bestimmenden Grössen willkürlich. Wählt man die Verhältnisse $\frac{r}{\varrho}$ und $\frac{s}{\sigma}$ als die durch die Coefficienten des Ausdruckes R'^2 auszudrückenden Grössen, so ergiebt sich aus (5) durch Division

$$\frac{r}{\varrho} \cdot \frac{s}{\sigma} = \frac{n}{\nu},$$

und da man die zweite der Gleichungen (5) schreiben kann

$$(m-\mu)^2 + \nu\left(1-\frac{r}{\varrho}\right)\left(1-\frac{s}{\sigma}\right)$$
$$= (m-\mu)^2 + \nu\left[1-\left(\frac{r}{\varrho}+\frac{s}{\sigma}\right)+\frac{r}{\varrho}\cdot\frac{s}{\sigma}\right] = 0,$$

wenn man den eben gefundenen Werth von $\frac{r}{\varrho} \cdot \frac{s}{\sigma}$ substituirt,

$$\left.\begin{aligned} \nu\left(\frac{r}{\varrho}+\frac{s}{\sigma}\right) = (m-\mu)^2 + n + \nu. \\ \text{Alsdann folgt sogleich} \\ \nu\left(\frac{r}{\varrho}-\frac{s}{\sigma}\right) = \pm\sqrt{[(m-\mu)^2 + n + \nu]^2 - 4n\nu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Digitized by Google

wodurch $\frac{r}{\varrho}$ und $\frac{s}{\sigma}$ im Uebrigen eindeutig bestimmt sind, nur dass es willkürlich bleibt, ob man die Differenz $\frac{r}{\varrho} - \frac{s}{\sigma}$ positiv oder negativ, d. h. $\frac{r}{\varrho} >$ oder $< \frac{s}{\sigma}$ nimmt, wodurch die Werthe dieser Grössen nur mit einander vertauscht werden. Ob aber die Substitution auch reelle Werthe für $\frac{r}{\varrho}$ und $\frac{s}{\sigma}$ liefert, hängt davon ab, ob der Ausdruck

$$[(m-\mu)^2 + n + \nu]^2 - 4n\nu = W,$$

den wir der Kürze wegen mit W bezeichnen, positiv ist oder nicht. Nun erhellt zuerst, dass W positiv wird, wenn eine der Grössen n und ν positiv und die andere negativ ist. Dieser Fall tritt aber ein, wenn die Gleichung $R'^2 = 0$ zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat. Giebt man ferner der Grösse W die Form

$$W = [(m-\mu)^2 + n - \nu]^2 + 4(m-\mu)^2 \cdot \nu,$$

so sieht man, dass sie positiv wird, sobald nur ν positiv ist, d. h. sobald die Gleichnng $R'^2 = 0$ überhaupt ein Paar imaginärer Wurzeln hat, gleichviel ob das andere Paar reell oder imaginär ist. Wenn also imaginäre Wurzeln vorhanden sind, erweist sich die Transformation stets als reell. Für den dritten Fall der Realität aller vier Wurzeln endlich sind n und ν beide negativ, und dann kann man W in zwei reelle Factoren zerlegen, indem man

$$W = [(m-\mu)^2 + n + \nu + 2\sqrt{n\nu}]\,[(m-\mu)^2 + n + \nu - 2\sqrt{n\nu}]$$
$$= [(m-\mu)^2 - (\sqrt{-n} + \sqrt{-\nu})^2]\,[(m-\mu)^2 - (\sqrt{-n} - \sqrt{-\nu})^2]$$

erhält. Drückt man aber dies durch die Wurzeln der Gleichung $R'^2 = 0$ den Formeln (1) gemäss aus, so erhält man

$$W = \left[\left(\frac{p+q-\pi-\varkappa}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q+\pi-\varkappa}{2}\right)^2\right] \times$$
$$\left[\left(\frac{p+q-\pi-\varkappa}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q-\pi+\varkappa}{2}\right)^2\right]$$
$$= (p-\varkappa)\,(q-\pi)\,(p-\pi)\,(q-\varkappa).$$

Dieser Ausdruck kann nun durch zweckmässige Anordnung der vier Wurzeln stets positiv gemacht werden. Des Folgenden wegen wird es zweckmässig sein, dies etwas näher zu

Digitized by Google

untersuchen. Es leuchtet ein, dass W in folgenden vier Fällen positiv wird:

1) Wenn p und q beide grösser als π und $\varkappa$ sind,
2) „ p „ q „ kleiner „ π „ $\varkappa$ „
3) „ p „ q „ zwischen π und $\varkappa$ liegen,
4) „ π „ $\varkappa$ „ „ p „ q „

Der gemeinsame Charakter dieser vier Anordnungen lässt sich dahin aussprechen, dass sowohl p und q als auch π und $\varkappa$ je zwei der Grösse nach auf einander folgende Wurzeln sein müssen, wenn man auch die grösste und kleinste Wurzel als aufeinander folgende gelten lässt, indem man nämlich annimmt, dass man durch das Unendliche hindurch entweder von der grössten zur kleinsten in fortwährendem Zunehmen oder von der kleinsten zur grössten in fortwährendem Abnehmen fortschreitet. Hält man dieses fest und bemerkt zugleich, dass die drei letzteren Anordnungen aus der ersten durch cyclische Vertauschung entstehen, so kann man leicht sämmtliche Anordnungen, in denen W positiv wird, aufstellen. Es giebt zunächst, wie leicht zu sehen, vier Anordnungen, bei welchen p und q beide grösser als π und $\varkappa$ sind, nämlich, wenn man die Wurzeln ihrer Grösse nach hinter einander setzt, mit der grössten beginnend, die folgenden:

$$p\,q\,\pi\,\varkappa,\quad p\,q\,\varkappa\,\pi,\quad q\,p\,\pi\,\varkappa,\quad q\,p\,\varkappa\,\pi.$$

Aus diesen erhält man dann durch cyclische Vertauschung die sämmtlichen Anordnungen, bei denen der Ausdruck W positiv wird, nämlich die folgenden 16:

$$1)\begin{cases} p\,q\,\pi\,\varkappa \\ q\,\pi\,\varkappa\,p \\ \pi\,\varkappa\,p\,q \\ \varkappa\,p\,q\,\pi \end{cases} \quad 2)\begin{cases} p\,q\,\varkappa\,\pi \\ q\,\varkappa\,\pi\,p \\ \varkappa\,\pi\,p\,q \\ \pi\,p\,q\,\varkappa \end{cases} \quad 3)\begin{cases} q\,p\,\pi\,\varkappa \\ p\,\pi\,\varkappa\,q \\ \pi\,\varkappa\,q\,p \\ \varkappa\,q\,p\,\pi \end{cases} \quad 4)\begin{cases} q\,p\,\varkappa\,\pi \\ p\,\varkappa\,\pi\,q \\ \varkappa\,\pi\,q\,p \\ \pi\,q\,p\,\varkappa. \end{cases}$$

Dabei ist zugleich ersichtlich, dass die Gruppen 3) und 4) aus den Gruppen 1) und 2) entstehen, wenn man die Grössen gerade in umgekehrter Ordnung nimmt.

In den noch übrigen möglichen 8 Anordnungen, bei welchen die Wurzeln p, q und π, $\varkappa$ in einander geschoben erscheinen, wird W negativ; es sind die folgenden:

Digitized by Google

$$\begin{array}{ll} p\,\pi\,q\,\varkappa & \pi\,p\,\varkappa\,q \\ \pi\,q\,\varkappa\,p & p\,\varkappa\,q\,\pi \\ q\,\varkappa\,p\,\pi & \varkappa\,q\,\pi\,p \\ \varkappa\,p\,\pi\,q & q\,\pi\,p\,\varkappa. \end{array}$$

Auch hier entsteht die zweite Gruppe aus der ersten durch Umkehrung der Reihenfolge der Grössen.

Nachdem wir die Ueberzeugung gewonnen haben, dass man mittelst der Formeln (6) die Verhältnisse $\frac{r}{\varrho}$ und $\frac{s}{\sigma}$ stets reell aus den gegebenen Coefficienten des Ausdrucks R'^2 bestimmen kann, nehmen wir nun die Grössen r, ϱ, s, σ als bekannt an (zwei derselben bleiben natürlich willkürlich) und führen die Reduction des Differentials $\frac{dx}{R}$ zu Ende. Man bemerke dabei, dass von den beiden Factoren, welche den Ausdruck (4) für R'^2 bilden, der zweite aus dem ersten entsteht, wenn man die lateinischen Buchstaben mit den griechischen vertauscht. Setzt man nun der Kürze wegen

$$\varrho - r - (\sigma - s)\,y = N,$$

so erhält man, da r, ϱ, s, σ so bestimmt sind, dass die erste Potenz von y verschwindet, für den ersten Factor

$$N^2\,[(x-m)^2 + n] = (m-\mu)^2\,r^2 + n\,(\varrho - r)^2 + [(m-\mu)^2\,s^2 + n\,(\sigma - s)^2]\,y^2,$$

oder, wenn man für n den aus (5) gezogenen Werth

$$(7)\quad n = -\frac{(m-\mu)^2\,rs}{(\varrho - r)(\sigma - s)}$$

substituirt,

$$N^2[(x-m)^2+n] = (m-\mu)^2\left\{r^2 - \frac{rs(\varrho-r)}{\sigma-s} + \left[s^2 - \frac{rs(\sigma-s)}{\varrho-r}\right]y^2\right\}$$

$$= (m-\mu)^2\left\{\frac{r^2(\sigma-s) - rs(\varrho-r)}{\sigma-s} + \left[\frac{s^2(\varrho-r) - rs(\sigma-s)}{\varrho-r}\right]y^2\right\}$$

$$= (m-\mu)^2\,(r\sigma - \varrho s)\left\{\frac{r}{\sigma-s} - \frac{s}{\varrho-r}\,y^2\right\}.$$

Durch Vertauschung der lateinischen mit den griechischen Buchstaben ergiebt sich daraus sogleich für den zweiten Factor:

$$N^2\,[(x-\mu)^2 + \nu] = (m-\mu)^2\,(r\sigma - \varrho s)\left\{\frac{\varrho}{\sigma-s} - \frac{\sigma}{\varrho-r}\,y^2\right\}.$$

Digitized by Google

Setzt man nun

$$\left.\begin{aligned}(m-\mu)\frac{r}{\sigma-s}&=L, \quad (m-\mu)\frac{\varrho}{\sigma-s}=L'\\ (m-\mu)\frac{s}{\varrho-r}&=M, \quad (m-\mu)\frac{\sigma}{\varrho-r}=M'\end{aligned}\right\} \quad . \quad (8)$$

so erhält man

$$R'=\frac{(m-\mu)(r\sigma-\varrho s)}{N^2}\sqrt{(L-My^2)(L'-M'y^2)}.$$

Durch Differentiation eines der beiden Ausdrücke (3) folgt ferner:

$$dx=(m-\mu)\frac{(\sigma-s)(r-sy)-s(\varrho-r-[\sigma-s]y)}{N^2}dy$$

$$=(m-\mu)\frac{r\sigma-\varrho s}{N^2}dy,$$

mithin

$$\frac{dx}{R}=\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{dy}{\sqrt{(L-My^2)(L'-M'y^2)}}.$$

Nachdem hiedurch das Radical für alle Fälle in seine zwei reinen quadratischen Factoren zerfällt ist, kann dasselbe, je nachdem alle vier Wurzeln, oder nur zwei, oder keine reell sind, in eine der Formen

$$\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},\ \sqrt{(1-z^2)(1+\lambda^2z^2)},\ \sqrt{(1+z^2)(1+\lambda^2z^2)}$$

gebracht werden. Nämlich setzt man

$$\frac{M}{L}y^2=z^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

so erhält man

$$\frac{dx}{R}=\frac{1}{\sqrt{ALL'}}\frac{dy}{\sqrt{\left(1-\frac{M}{L}y^2\right)\left(1-\frac{M'}{L'}y^2\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{AML'}}\frac{dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-\frac{LM'}{ML'}z^2\right)}}.$$

Setzt man daher auch noch

$$\frac{LM'}{ML'}=k^2,$$

so wird

$$\frac{dx}{R}=\frac{1}{\sqrt{AML'}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Allein wie aus (9) erhellt, ist diese Reduction nur reell, wenn L und M gleiches Zeichen haben, und wenn auch die-

Digitized by Google

ses der Fall ist, so wird doch k imaginär, wenn L' und M' von verschiedenem Zeichen sind. Nun ergiebt sich aber aus (8) mit Rücksicht auf die Gleichungen (5)

$$ML = -n, \quad M'L' = -\nu.$$

Mithin haben M, L gleiches Zeichen, wenn die Wurzeln p und q reell sind, und ebenso sind M', L' von gleichem Zeichen, wenn π und $\varkappa$ reell sind. Die vorstehende Transformation ist also reell, wenn alle vier Wurzeln reell sind.

Sind zweitens p und q reell, dagegen π und $\varkappa$ imaginär, so ist $\frac{M}{L}$ positiv, daher z reell, aber $\frac{M'}{L'}$ negativ. Setzt man daher

$$\frac{LM'}{ML'} = -\lambda^2,$$

so wird für den Fall, dass nur zwei Wurzeln reell sind,

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{\sqrt{AML'}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\lambda^2 z^2)}}.$$

Sind endlich drittens sowohl p und q als auch π und $\varkappa$ imaginär, so ist sowohl $\frac{M}{L}$ als auch $\frac{M'}{L'}$ negativ. Dann setze man

$$-\frac{M}{L} y^2 = z^2,$$

wodurch man

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{\sqrt{-AML'}} \frac{dz}{\sqrt{\left(1+z^2\right)\left(1+\frac{LM'}{ML'} z^2\right)}}$$

erhält, oder wenn man

(10) . . . . . $\frac{LM'}{ML'} = \lambda^2$

setzt, für den Fall, dass keine Wurzel reell ist,

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{\sqrt{-AML'}} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+\lambda^2 z^2)}}.$$

Jede dieser drei Formen geht nun in die gemeinschaftliche Normalform

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

über, wenn man

im ersten Falle $z = \sin \varphi$
im zweiten „ $z = \cos \varphi$
im dritten „ $z = \operatorname{tg} \varphi$

Digitized by Google

setzt. Die Substitution $z = \sin\varphi$ des ersten Falles ist schon § 3 erwähnt worden; sie giebt

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{\sqrt{AML'}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

Im zweiten Falle erhält man

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\,d\varphi, \quad \sqrt{1+\lambda^2 z^2} = \sqrt{1+\lambda^2-\lambda^2\sin^2\varphi}$$

$$= \sqrt{1+\lambda^2}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\sin^2\varphi},$$

mithin, wenn

$$\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{M'L}{ML'-M'L} = k^2$$

gesetzt wird,

$$\frac{dx}{R} = -\frac{1}{\sqrt{A(ML'-M'L)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Im dritten Falle erhält man durch $z = \operatorname{tg}\varphi$

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi}, \quad \sqrt{1+\lambda^2 z^2} = \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{1-(1-\lambda^2)\sin^2\varphi};$$

also, wenn

$$1-\lambda^2 = \frac{ML'-M'L}{ML'} = k^2$$

gesetzt wird,

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{\sqrt{-AML'}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \ldots \quad (11)$$

Hiedurch ist nun zwar für alle drei Fälle die Reduction auf die Normalform ausgeführt, allein jetzt ist noch darauf Rücksicht zu nehmen, dass die Amplitude φ reelle Werthe annehme, und zugleich dass der Modul ein reeller und echter Bruch werde. Dazu ist im ersten Falle erforderlich, dass $z < 1$ und $k < 1$ sei. Im zweiten Falle muss ebenfalls $z < 1$ sein; dagegen erleidet λ keine Beschränkung, weil $k^2 = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$ immer kleiner als 1 ist. Im dritten Falle endlich kann z beliebig sein, weil es der Tangente gleich gesetzt wird, dagegen muss $\lambda < 1$ sein, wenn k reell und kleiner als 1 werden soll.

Wir werden nun zuerst den dritten Fall betrachten, weil derselbe sich kurz erledigt, und dann, da z alle beliebigen Werthe annehmen kann, keiner weiteren Erörterungen bedarf. Beim ersten und zweiten Falle müssen wir jedoch, und das soll im nächsten § geschehen, auf die Wurzeln der Glei-

Digitized by Google

chung $R^2 = 0$ und auf das Intervall der Werthe, welche die Variable x bei der Integration durchläuft, Rücksicht nehmen.

Im dritten Falle war nämlich (10)

$$\lambda^2 = \frac{LM'}{ML'};$$

aus (8) folgt aber

$$\frac{L}{L'} = \frac{r}{\varrho}, \qquad \frac{M'}{M} = \frac{\sigma}{s},$$

mithin ist

$$\lambda^2 = \frac{r}{\varrho}\frac{\sigma}{s}; \quad k^2 = 1 - \lambda^2 = -\frac{\sigma}{s}\left(\frac{r}{\varrho} - \frac{s}{\sigma}\right).$$

Nun blieb in den Formeln (6) das Zeichen der Differenz $\frac{r}{\varrho} - \frac{s}{\sigma}$ noch willkürlich, man kann es also immer so wählen, dass k^2 positiv ausfalle, wodurch zugleich λ^2 und also auch k^2 kleiner als 1 wird. Man erhält ferner aus (8) und (7)

$$ML' = \frac{(m-\mu)^2 \varrho s}{(\varrho - r)(\sigma - s)} = -\frac{n\varrho s}{rs} = -n \cdot \frac{\varrho}{r},$$

und dadurch geht die Formel (11) über in

$$\frac{dx}{R} = \sqrt{\frac{1}{An}\frac{r}{\varrho}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

§ 13.

Wir gehen nun zu einer näheren Betrachtung des ersten Falles über, die zugleich zu Vorschriften führen wird, wie man in jedem Falle die entsprechenden Substitutionen zur Reduction in die Normalform, gleich durch die Wurzeln der Gleichung $R^2 = 0$ ausgedrückt, finden kann.

Wir haben gesehen, dass man immer durch eine Substitution der ersten Ordnung, welche zwei zu bestimmende Constanten enthält, den Ausdruck

$$\frac{dx}{R} = \frac{dx}{\sqrt{A(x-p)(x-q)(x-\pi)(x-\varkappa)}}$$

auf die Form

$$C\frac{dx}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

in welcher C eine constante Grösse bedeutet, zurückführen kann.

Da das Radical R verschwindet, wenn x einen der Werthe $p, q, \pi, \varkappa$ annimmt, der Ausdruck $(1-z^2)(1-k^2z^2)$ aber

Digitized by Google

zu Null wird, wenn z einen der Werthe $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ erhält, so folgt, dass die Substitution der Art sein muss, dass jedem der Werthe p, q, π, $\varkappa$ von x einer der Werthe $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ von z entspreche. Welcher Werth von z jedem einzelnen der Werthe von x zugehöre, ist willkürlich anzunehmen, nur muss darauf Rücksicht genommen werden, dass p und q, und ebenso auch π und $\varkappa$ je zwei auf einander folgende Wurzeln werden, damit die Transformation reell ausfalle. (§. 12, S. 37.) Wenn nun aber k ein positiver echter Bruch ist, und dies wollen wir ja zu bewirken suchen, so folgen die vier Werthe von z, für welche das Radical in z verschwindet, in folgender Reihe der Grösse nach auf einander:

$$+\frac{1}{k},\ +1,\ -1,\ -\frac{1}{k}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Es wird also der genannten Bedingung genügt werden, wenn wir annehmen, dass diesen Werthen von z der Reihe nach die Werthe

$$\pi,\ p,\ q,\ \varkappa$$

von x entsprechen. Um aber zu bewirken, dass diese Werthe von x und z zusammengehören, ist es nur nöthig, zu setzen

$$x - p = a\,(1 - z), \quad x - \pi = c\,(1 - kz),$$
$$x - q = b\,(1 + z), \quad x - \varkappa = d\,(1 + kz),$$

worin a, b, c, d constante Grössen bedeuten. Allein zur Herstellung der Reduction bedürfen wir nur zweier constanter Grössen. Wir können daher auch je zwei der obigen Gleichungen durch Division zu einer einzigen vereinigen und erhalten dann, $\frac{a}{b} = P$, $\frac{c}{d} = Q$ gesetzt,

$$\frac{x-p}{x-q} = P\,\frac{1-z}{1+z}, \quad \frac{x-\pi}{x-\varkappa} = Q\,\frac{1-kz}{1+kz}, \quad . \quad . \quad (13)$$

worin P, Q, k zu bestimmen sind. Diese Bestimmung ergiebt sich, wenn man in diesen Gleichungen die Werthe p, q, π, $\varkappa$ und für z die ihnen entsprechenden Werthe $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ substituirt. Dadurch erhält man

Digitized by Google

$$\frac{\pi - p}{\pi - q} = -P\frac{1-k}{1+k}, \quad \frac{p-\pi}{p-\varkappa} = Q\frac{1-k}{1+k},$$
$$\frac{\varkappa - p}{\varkappa - q} = -P\frac{1+k}{1-k}, \quad \frac{q-\pi}{q-\varkappa} = Q\frac{1+k}{1-k},$$

und daraus durch Multiplication

$$(14) \ldots P^2 = \frac{(\pi-p)(\varkappa-p)}{(\pi-q)(\varkappa-q)}, \quad Q^2 = \frac{(p-\pi)(q-\pi)}{(p-\varkappa)(q-\varkappa)},$$

und durch Division

$$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = \frac{(p-\pi)(q-\varkappa)}{(p-\varkappa)(q-\pi)}.$$

Es ist zu bemerken, dass die letzteren drei Ausdrücke dieselben Factoren, nur in verschiedener Anordnung, enthalten, wie die Grösse W des vorigen §, dass sie also auch in denselben Fällen positiv werden, wie jene. Da wir nun Sorge getragen haben, dass p, q und π, $\varkappa$ je zwei auf einander folgende Wurzeln sind, so werden P^2, Q^2, $\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2$ positiv, und damit die Transformation reell.

Da sich nur die Quadrate der Grössen P, Q, $\frac{1-k}{1+k}$ ergeben haben, so müssen wir über das Zeichen derselben eine Entscheidung treffen. Nun ist aber $\frac{1-k}{1+k}$ positiv oder negativ, je nachdem k kleiner oder grösser als 1 ist; um daher k als einen echten Bruch zu erhalten, muss man den positiven Werth der Quadratwurzel nehmen und setzen

$$(15) \ldots \frac{1-k}{1+k} = +\sqrt{\frac{(p-\pi)(q-\varkappa)}{(p-\varkappa)(q-\pi)}}.$$

Differenzirt man ferner die Gleichungen (13), so erhält man

$$(16) \ldots \begin{cases} (p-q)\dfrac{dx}{(x-q)^2} = -2P\dfrac{dz}{(1+z)^2}, \\ (\pi-\varkappa)\dfrac{dx}{(x-\varkappa)^2} = -2Q\dfrac{kdz}{(1+kz)^2}, \end{cases}$$

oder

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{2P}{p-q}\cdot\frac{(x-q)^2}{(1+z)^2} = -\frac{2Q}{\pi-\varkappa}\cdot\frac{k(x-\varkappa)^2}{(1+kz)^2}.$$

Hieraus folgt, dass die Verhältnisse

$$\frac{P}{p-q}, \quad \frac{Q}{\pi-\varkappa}$$

immer dasselbe Zeichen haben müssen, und dass sie negativ zu nehmen sind, wenn x und z gleichzeitig abnehmen, da-

Digitized by Google

gegen positiv, wenn z abnimmt, während x wächst. Hienach ist das Zeichen von P und Q zu bestimmen.

Dividirt man nun die Gleichungen (13) und (16) durch einander, so erhält man

$$\frac{(p-q)\,dx}{(x-p)\,(x-q)} = -\frac{2\,dz}{1-z^2}, \quad \frac{(\pi-\varkappa)\,dx}{(x-\pi)\,(x-\varkappa)} = -\frac{2k\,dz}{1-k^2z^2};$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{\sqrt{A\,(x-p)\,(x-q)\,(x-\pi)\,(x-\varkappa)}} \\ &= \pm\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{A\,(p-q)\,(\pi-\varkappa)}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}}, \end{aligned}\right\} \quad . . (17)$$

worin das obere oder untere Zeichen zu wählen ist, je nachdem x und z gleichzeitig abnehmen, oder x wächst, während z abnimmt.

Wir haben nun zu zeigen, dass es möglich ist, die vorstehende Transformation so einzurichten, dass z immer kleiner als 1 wird. Dazu müssen wir auf das Intervall Rücksicht nehmen, welches die Variable x bei der Integration durchläuft. Es seien, der Grösse nach geordnet,

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

die vier Wurzeln der Gleichung $R^2 = 0$, so dass

$$\alpha > \beta > \gamma > \delta$$

und

$$R^2 = AR'^2 = A\,(x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma)\,(x-\delta).$$

Dann werden sämmtliche Werthe, die x überhaupt annehmen kann, durch die vier Wurzeln in vier Intervalle getheilt, nämlich in die Intervalle

1) $\alpha \cdots \beta$,
2) $\beta \cdots \gamma$,
3) $\gamma \cdots \delta$,
4) $\delta \cdots \mp\infty \cdots \alpha$,

und es ist klar, dass R'^2 negativ ist, wenn x im 1ten und 3ten, und positiv, wenn x im 2ten und 4ten Intervalle liegt, d. h.

R'^2 negativ, wenn 1) $\alpha > x > \beta$, 3) $\gamma > x > \delta$,
R'^2 positiv, wenn 2) $\beta > x > \gamma$, 4) $x < \delta$ oder $x > \alpha$.

Wenn also x aus einem zwischen zwei auf einander folgenden Wurzeln liegenden Intervalle in das nächst folgende hinüber-

Digitized by Google

geht, so wechselt R'^2 das Zeichen. Daraus folgt: wenn das gegebene elliptische Integral überhaupt ein reelles ist, so werden die Grenzen der Integration in einem und demselben Intervalle zwischen zwei auf einander folgenden Wurzeln der Gleichung $R^2 = 0$ liegen, und ist dieses Intervall das 1ste oder 3te, so wird die Constante A negativ sein. Hätte man es aber mit einem imaginären Integrale zu thun, sodass x mehrere Intervalle durchlaufen könnte, so würde man das Integral in mehrere Theile zerlegen können, in der Art, dass die Grenzen jedes einzelnen Integrals ein Intervall nicht überschreiten. Wäre z. B. das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{AR'^2}}$$

gegeben, bei welchem A negativ und

$$\alpha > x_0 > \beta, \quad \beta > x_1 > \gamma$$

sei, so würde man haben

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{AR'^2}} = \int_{x_0}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{AR'^2}} - i\int_{\beta}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{-AR'^2}}.$$

In jedem Falle hat man es, sei es von vorne herein, sei es durch Zerlegung, nur mit Integralen zu thun, deren beide Grenzen sich in einem und demselben von zwei auf einander folgenden Wurzeln begrenzten Intervalle befinden.

Nun waren bei der Reduction p und q als diejenigen Werthe von x angenommen, welche den Werthen $+1$ und -1 von z entsprechen. Wenn daher x während der Integration zwischen p und q liegt, so wird auch z nicht über die Werthe $+1$ und -1 hinausgehen. Hienach hat man, um zu bewirken, dass z nicht grösser als $+1$ und nicht kleiner als -1 werde, nur nöthig, in den obigen Formeln für p und q diejenigen Wurzeln zu setzen, zwischen welchen die Grenzen des zu behandelnden Integrals liegen. Es fragt sich alsdann noch, welche Wurzeln man für π und $\varkappa$ zu setzen habe. Dies ergiebt sich durch folgende Betrachtung. Die Wurzeln $p, q, \pi, \varkappa$ waren diejenigen Werthe von x, welche resp. den Werthen $+1, -1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ von z entsprechen. Ordnet man diese unter der Voraussetzung, dass $k < 1$ ist, der Grösse

Digitized by Google

nach, so hat man entweder die wachsende Reihenfolge der Werthe von z

$$-\frac{1}{k},\ -1,\ +1,\ +\frac{1}{k},$$

entsprechend den Werthen von x

$$\varkappa,\ q,\ p,\ \pi,$$

oder die abnehmende Reihenfolge der z-Werthe

$$+\frac{1}{k},\ +1,\ -1,\ -\frac{1}{k},$$

entsprechend den x-Werthen

$$\pi,\ p,\ q,\ \varkappa.$$

Während daher x alle Werthe abnehmend durchläuft und nach und nach die Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ annimmt, durchläuft z entweder abnehmend oder zunehmend die eben genannten Werthe. Man denke sich nun dieses Abnehmen oder Wachsen ohne Aufhören durch $\mp\infty$ oder $\pm\infty$ hindurch; dann kann man die Werthe auch cyclisch mit einander vertauschen, ohne die Reihenfolge zu ändern. Da man nun jedesmal diejenigen zwei der Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, zwischen welchen die Grenzen des Integrals liegen, den Werthen p und q von x gleich zu setzen hat, indem die letzteren den Werthen $+1$ und -1 von z entsprechen, so ergiebt die Reihenfolge jedesmal, welche der Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ man den Werthen π und $\varkappa$ gleich zu setzen hat. Dabei ergeben sich jedesmal zwei Substitutionsformeln, indem man entweder x und z gleichzeitig abnehmen oder aber bei abnehmendem x das z wachsen lassen kann. Ein Beispiel soll dies zunächst erläutern. Es mögen die Grenzen der Integration zwischen α und β liegen, also $\alpha > x > \beta$, und x und z sollen gleichzeitig abnehmen. Dann entsprechen einander folgende Werthe von z und x:

$$z \cdots\cdots +\frac{1}{k},\ +1,\ -1,\ -\frac{1}{k},$$
$$x \cdots\cdots \pi,\ p,\ q,\ \varkappa.$$

Nun sind α und β die Grenzen des Intervalls, in welchem sich x befindet, also hat man diese den Werthen p und q gleich zu setzen, und zwar, weil x von p nach q abnehmend angenommen wird, und auch von α nach β ein Abnehmen stattfindet,

$$p = \alpha \quad \text{und} \quad q = \beta$$

Digitized by Google

zu setzen. Nun folgt auf q die Wurzel $\varkappa$, und auf β die Wurzel γ, also ist

$$\varkappa = \gamma;$$

endlich folgt π auf $\varkappa$ und δ auf γ, also hat man zuletzt

$$\pi = \delta$$

zu setzen. In ähnlicher Weise kann man in allen übrigen Fällen verfahren; das folgende Schma giebt an, welches die in jedem Falle einander entsprechenden Werthe sind:

x und z nehmen gleichzeitig ab

	$z \cdots$	$+\frac{1}{k}$,	$+1$,	-1,	$-\frac{1}{k}$
	$x \cdots$	π,	p,	q,	$\varkappa$
$\alpha > x > \beta$		δ,	α,	β,	γ
$\beta > x > \gamma$		α,	β,	γ,	δ
$\gamma > x > \delta$		β,	γ,	δ,	α
$\delta > x$ oder $x > \alpha$		γ,	δ,	α,	β;

z wächst bei abnehmendem x

	$z \cdots$	$-\frac{1}{k}$,	-1,	$+1$,	$+\frac{1}{k}$
	$x \cdots$	$\varkappa$,	q,	p,	π
$\alpha > x > \beta$		δ,	α,	β,	γ
$\beta > x > \gamma$		α,	β,	γ,	δ
$\gamma > x > \delta$		β,	γ,	δ,	α
$\delta > x$ oder $x > \alpha$		γ,	δ,	α,	β.

Für jedes der Intervalle, in welchem x liegen kann, erhält man so zwei Reductionsformeln, bei welchen sowohl z als auch k echte Brüche werden, und zwar so, dass bei der einen x und z gleichzeitig wachsen und abnehmen, bei der andern dagegen z wächst, wenn x abnimmt, und umgekehrt.

Die vollständigen Formeln nun für jeden Fall aufzustellen, hätte keine Schwierigkeit. Es scheint aber bequemer zu sein, in jedem vorkommenden Falle nach dem obigen Schema die für p, q, π, $\varkappa$ zu setzenden Werthe aufzusuchen und dann die Formeln (13), (14), (15) und (17) anzuwenden. Nur ein Beispiel diene zur Erläuterung.

Es sei $\gamma > x > \delta$, also A bei reellem Integral negativ, und z wachse bei abnehmendem x. Dann entsprechen einander folgende Werthe:

Digitized by Google

$$z \cdots\cdots -\frac{1}{k}, -1, +1, +\frac{1}{k},$$

$$x \cdots\cdots \begin{cases} \varkappa, & q, & p, & \pi \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \alpha. \end{cases}$$

Also giebt zuerst die Formel (15)

$$\frac{1-k}{1+k} = +\sqrt{\frac{(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)}{(\delta-\beta)(\gamma-\alpha)}};$$

ferner erhält man aus (14)

$$P = -\sqrt{\frac{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}},$$

und zwar ist P negativ zu nehmen, weil

$$\frac{P}{p-q} = \frac{P}{\delta-\gamma}$$

positiv werden muss; dann folgt aus (13)

$$\frac{x-\delta}{x-\gamma} = P\frac{1-z}{1+z},$$

und endlich aus (17)

$$\frac{dx}{\sqrt{A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}$$

$$= -\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{A(\delta-\gamma)(\alpha-\beta)}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

wo das Minus-Zeichen zu setzen ist, weil z bei wachsendem x abnimmt. Weil A negativ ist, so wird die rechte Seite dieses Ausdrucks reell, da auch $\delta - \gamma$ negativ ist.

Ueber die Bestimmung des Zeichens der Grösse P sei noch folgende Bemerkung erlaubt. Dieses Zeichen ist, wie oben bemerkt, so zu wählen, dass

$$\frac{P}{p-q}$$

negativ wird, wenn x und z gleichzeitig abnehmen, im entgegengesetzten Falle positiv. Nun entsprechen einander die Werthe

$$z \cdots\cdots +\frac{1}{k}, +1, -1, -\frac{1}{k},$$

$$x \cdots\cdots \quad \pi, \quad p, \quad q, \quad \varkappa.$$

Wenn daher x und z gleichzeitig abnehmen, so ist mit einer sogleich anzuführenden Ausnahme $p > q$, mithin P negativ zu nehmen. Wächst aber x bei abnehmendem z, so ist mit Ausschluss desselben Ausnahmefalles $p < q$, also P wiederum

Digitized by Google

negativ zu nehmen. Die Ausnahme aber tritt dann ein, wenn die Zu- oder Abnahme von p nach q durch das Unendliche hindurch geschieht, wenn also p und q die grösste α und die kleinste δ der Wurzeln sind, d. h. wenn die Grenzen des zu transformirenden Integrals beide entweder $\geqq \alpha$ oder $\leqq \delta$ sind. Alsdann ist $p - q$ bei gleichzeitiger Abnahme von x und z negativ, im entgegengesetzten Falle positiv, dann also ist P positiv zu nehmen. Hieraus ergiebt sich die Regel: Liegen die Grenzen des auf die Normalform zu reducirenden Integrals in einem der drei ersten Intervalle 1) $\alpha \cdots \beta$, 2) $\beta \cdots \gamma$, 3) $\gamma \cdots \delta$, so ist P negativ; liegen die Grenzen aber in dem vierten Intervalle 4) $\delta \cdots \mp\infty \cdots \alpha$, so ist P positiv. Man übersieht leicht, dass von der Grösse Q ganz das Nämliche gilt.

Stellt man die Reductionsformeln nun noch einmal zusammen, so sind sie folgende:

$$\frac{1-k}{1+k} = +\sqrt{\frac{(p-\pi)(q-\varkappa)}{(p-\varkappa)(q-\pi)}}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-p}{x-q} &= \mp\sqrt{\frac{(p-\pi)(p-\varkappa)}{(q-\pi)(q-\varkappa)}} \cdot \frac{1-z}{1+z} \\ \frac{x-\pi}{x-\varkappa} &= \mp\sqrt{\frac{(p-\pi)(q-\pi)}{(p-\varkappa)(q-\varkappa)}} \cdot \frac{1-kz}{1+kz} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} - \text{ wenn } x \text{ in einem der drei} \\ \text{ersten Intervalle liegt,} \\ + \text{ wenn } x \text{ im vierten Inter-} \\ \text{valle liegt.} \end{array}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{A(x-p)(x-q)(x-\pi)(x-\varkappa)}} = \pm\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{A}(p-q)(\pi-\varkappa)} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

\+ wenn x und z gleichzeitig wachsen oder abnehmen,

\— wenn x wächst bei abnehmendem z.

§ 14.

Wir gehen nun zur Betrachtung des Falles über, dass die Grösse R^2 nur vom dritten Grade ist. Es wurde schon § 11 erwähnt, dass man dies als einen speciellen Fall betrachten kann, der sich durch Specification der vorigen Betrachtung erledigen lässt. Dies beruht auf dem bekannten Satze, dass, wenn eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades durch das Verschwinden der Coefficienten der m höchsten Potenzen der Unbekannten auf den $(n-m)^{\text{ten}}$ Grad reducirt wird, m ihrer Wurzeln unendlich gross geworden sind. Ist

Digitized by Google

nun die Gleichung $R^2 = 0$ nur vom dritten Grade, so kann man sie als eine Gleichung vierten Grades betrachten, deren eine Wurzel unendlich ist; man wird daher auch die zugehörigen Reductionsformeln aus den vorigen ableiten können, wenn man eine der Wurzeln unendlich gross setzt, und zwar, was gleichgültig ist, entweder die grösste $= +\infty$ oder die kleinste $= -\infty$. Es seien α, β, γ die drei reellen Wurzeln der Gleichung dritten Grades $R^2 = 0$, und wir nehmen $\delta = -\infty$ an; dann sind die Intervalle für die Grenzen der Integrale 1) $\alpha \cdots \beta$, 2) $\beta \cdots \gamma$, 3) $\gamma \cdots -\infty$, 4) $+\infty \cdots \alpha$. Im Uebrigen bleiben die im vorigen § gegebenen Vorschriften bestehen, nur ist überall $\delta = \infty$ zu setzen. Den Einfluss davon wird man am besten an dem im vorigen § gegebenen Beispiele übersehen können. Dividirt man nämlich in den betreffenden Formeln unter den Wurzelzeichen entweder im Zähler und Nenner oder auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit δ oder δ^2 und setzt dann $\delta = \infty$, so werden die Verhältnisse je zweier, δ enthaltender, Factoren gleich 1, und die Wirkung des Unendlichwerdens von δ ist daher einfach die, dass man alle Factoren, welche δ enthalten, fortzulassen hat. Auf diese Weise ergeben sich folgende Reductionsformeln:

Es ist $\gamma > x > -\infty$, und x nimmt mit wachsendem z ab. Man erhält

$$\frac{1-k}{1+k} = +\sqrt{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}, \quad \frac{1}{x-\gamma} = -\sqrt{\frac{1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}} \cdot \frac{1-z}{1+z},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}} = -\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{-A(\alpha-\beta)}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

§ 15.

Es soll nun zunächst die im Vorigen auseinandergesetzte Methode an einem Beispiele erläutert werden, und zwar stellen wir uns die Aufgabe, das elliptische Integral, das bei der Bewegung des Pendels die Zeit bestimmt, nämlich das Integral (5) § 6

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos\psi - \cos\alpha}} \quad \cdots \quad (18)$$

auf die Normalform zu reduciren. Dasselbe kann zuerst auf

Digitized by Google

verschiedene Weise in algebraischer Form dargestellt werden. Die scheinbar einfachste Art, die aber bei einer Transformation der ersten Ordnung nicht die einfachste Reduction liefert, entsteht, wenn man

$$\cos \psi = x$$

setzt, wodurch man, wenn zugleich der Kürze wegen

$$\cos \alpha = a$$

gesetzt wird,

$$(19) \quad t = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)(x-a)(x+1)}}$$

erhält. Wie man sieht, ist alsdann das Radical R^2 vom 3ten Grade, und zwar zerlegt es sich von selbst in 3 lineare Factoren, indem die Wurzeln der Gleichung $R^2 = 0$ der Grösse nach geordnet, die folgenden

$$+1, \; +a, \; -1$$

sind. Der Winkel α bedeutet den grössten Werth, den der Winkel ψ annehmen kann, cos ψ oder x kann daher nicht grösser als $+1$ und nicht kleiner als a werden, wodurch es sich bestätigt, dass x nur in dem Intervall zwischen den beiden auf einander folgenden Wurzeln $+1$ und a liegt.

Für die Wurzeln p und q haben wir daher in den Formeln des § 13 1 und a zu setzen, und zwar entweder in dieser oder in umgekehrter Ordnung, je nachdem wir annehmen wollen, dass z und x gleichzeitig wachsen oder nicht. Da aber in (19) x abnimmt wenn t wächst, so wollen wir, damit t und z gleichzeitig wachsen, diejenige Reduction wählen, bei welcher z abnimmt, wenn x wächst. Da ferner die Werthe

$$z \cdots\cdots + \frac{1}{k}, \; +1, \; -1, \; -\frac{1}{k},$$
$$x \cdots\cdots \quad \pi, \quad p, \quad q, \quad \varkappa,$$

einander entsprechen müssen, so müssen wir statt der Werthe

$$\pi, \quad p, \quad q, \quad \varkappa,$$

resp.
$$-1, \; +a, \; +1, \quad \infty$$

setzen. Alsdann geben die Reductionsformeln S. 50

$$\frac{1-k}{1+k} = +\sqrt{\frac{1+a}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \cos \tfrac{1}{2}\alpha,$$

Digitized by Google

woraus

$$k = \frac{1 - \cos \frac{1}{2}\alpha}{1 + \cos \frac{1}{2}\alpha} = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{4}\alpha$$

folgt. Ferner erhält man

$$\frac{x - a}{x - 1} = -\sqrt{\frac{1 + a}{2}} \cdot \frac{1 - z}{1 + z}$$

und dann

$$\frac{dx}{\sqrt{-(x-1)\,(x-a)\,(x+1)}} = -\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{1-a}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}}.$$

Setzt man hierin noch $z = \sin \varphi$ und drückt a und x durch α und ψ aus, so erhält man die vollständigen Reductionsformeln, die aber von den in § 6 gegebenen verschieden und nicht so einfach wie diese sind.

Zu diesen einfacheren gelangt man, wenn man nicht $\cos \psi$, sondern $\sin \frac{1}{2}\psi$ in (18) als neue Variable einführt. Denn da

$$\cos \psi - \cos \alpha = 2\,(\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2 \tfrac{1}{2}\psi)$$

ist, so wird, wenn man

$$\sin \tfrac{1}{2}\psi = x \quad \text{und} \quad \sin \tfrac{1}{2}\alpha = c$$

setzt, das elliptische Integral (18)

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(c^2-x^2)}},$$

oder, wenn man das Radical in seine linearen Factoren zerfällt und dieselben nach der Grösse der Wurzeln, deren Reihenfolge $+1, +c, -c, -1$ ist, ordnet,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x-1)\,(x-c)\,(x+c)\,(x+1)}}.$$

Der Winkel ψ liegt während der ganzen Bewegung zwischen $+\alpha$ und $-\alpha$, daher x wiederum zwischen den auf einander folgenden Wurzeln $+c$ und $-c$. Diese sind es daher, die wir an die Stelle von p und q zu setzen haben, und zwar auch in dieser Reihenfolge, wenn wir bewirken wollen, dass t, x und z gleichzeitig wachsen. Demnach hat man für

$$\begin{array}{lcccc} & \varkappa, & p, & q, & \varkappa, \\ \text{resp.} & +1, & +c, & -c, & -1 \end{array}$$

Digitized by Google

zu setzen und erhält aus den Formeln S. 50

$$\frac{1-k}{1+k} = +\sqrt{\frac{(c-1)(1-c)}{(c+1)(-c-1)}} = \frac{1-c}{1+c}, \quad k = c = \sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\frac{x-c}{x+c} = -\sqrt{\frac{(c-1)(c+1)}{(-c-1)(1-c)}} \cdot \frac{1-z}{1+z} = \frac{z-1}{z+1},$$

woraus

$$x = cz \quad \text{oder} \quad \sin\tfrac{1}{2}\psi = \sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\varphi;$$

endlich wird

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-c)(x+c)(x+1)}} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{2c \cdot 2}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$= \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

woraus, wie oben,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

folgt.

Wir schliessen hieran gleich die Betrachtung des ganz herumschwingenden Pendels, besonders weil dabei recht deutlich wird, wie die Reduction des elliptischen Integrals auf die Normalform wesentlich von den Grenzen, zwischen denen die Variable zu nehmen ist, abhängt.

Wir haben § 5 gesehen, dass, wenn man mit v die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, welche das Pendel zur Zeit $t = 0$, d. h. in dem Augenblicke, wo es durch die Verticallinie hindurchgeht, besitzt,

$$\cos\alpha = 1 - \frac{lv^2}{2g}$$

ist, und dass der Winkel α zu existiren aufhört und das Pendel ein ganz herumschwingendes wird, wenn

$$lv^2 \geq 4g$$

ist. Nun folgt

$$c = \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{lv^2}{4g}}.$$

In dem vorliegenden Falle ist also $c > 1$. Wollte man nun die vorige Reduction ohne Weiteres auch hier anwenden, so würde der Modul $k = c$ nicht mehr ein echter Bruch sein. In der That ist aber hier eine andere Reduction nothwendig, weil die Grenzen der Veränderlichen andere geworden sind.

Digitized by Google

Ordnet man die Wurzeln der Gleichung $R^2 = 0$ wiederum ihrer Grösse nach, so sind sie

$$+c, +1, -1, -c,$$

und jetzt liegt $x = \sin \frac{1}{2}\psi$ nicht mehr zwischen $+c$ und $-c$, sondern zwischen $+1$ und -1. Man hat daher für

$$\pi, \quad p, \quad q, \quad \varkappa,$$

resp. $$+c, +1, -1, -c$$

zu setzen. Mit diesen Werthen erhält man dann

$$\frac{1-k}{1+k} = +\sqrt{\frac{(1-c)\ (c-1)}{(1+c)\ (-1-c)}} = \frac{c-1}{c+1},$$

weil der positive Werth der Wurzel genommen werden muss, und $c > 1$ ist, woraus

$$k = \frac{1}{c} = \sqrt{\frac{4g}{lv^2}}$$

folgt. Ferner wird, weil nun $p = +1$, $q = -1$ zu setzen ist,

$$\frac{x-1}{x+1} = -\sqrt{\frac{(1-c)\ (1+c)}{(-1-c)\,(-1+c)}} \cdot \frac{1-z}{1+z} = \frac{z-1}{z+1},$$

woraus $$x = z \text{ oder } \psi = 2\varphi$$

folgt. Endlich ist

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-c)\ (x-1)\ (x+1)\ (x+c)}} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{2 \cdot 2c}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\ (1-k^2 z^2)}}$$
$$= k \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

und

$$t = k\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{v} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Bei dem ganz herumschwingenden Pendel lässt sich hienach der Winkel ψ selbst durch die Amplitude des Integrals ausdrücken. Nämlich da

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{vt}{2}$$

ist, so hat man

$$\varphi = am\frac{vt}{2} \text{ und daher } \psi = 2\,am\frac{vt}{2}.\left(\text{mod. } \sqrt{\frac{4g}{lv^2}}\right),$$

und damit bestätigt sich, dass der Winkel ψ fortwährend wächst, da die Amplitude für reelle Werthe des Arguments eine stets mit dem letzteren wachsende Function ist. (§ 4.)

Digitized by Google

Es wird sich später zeigen, dass auch die Function Amplitudo in eine stark convergirende Reihe entwickelt werden, und daher auch für jeden Werth des Arguments und des Moduls berechnet werden kann. Da nach § 4

$$\frac{d\,am\,u}{du} = \Delta\,am\,u$$

ist, so erhält man auch die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\psi}{dt} = v\,\Delta\,am\,\frac{vt}{2}.$$

§ 16.

Wir gehen nun zu dem zweiten Falle über, in welchem die Gleichung $R^2 = 0$ zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat. Wir haben § 12 gesehen, dass in diesem Falle der Ausdruck $\frac{dx}{R}$ auf die Form

$$C \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1+\lambda^2 z^2)}}$$

gebracht werden kann. Man kann nun diesen Fall kürzer erledigen und aus dem ersten Falle herleiten, wenn man k imaginär annimmt und

$$k = i\lambda$$

setzt. Wir wollen annehmen, es seien π und $\varkappa$ die beiden conjugirten imaginären Wurzeln. Setzt man

$$\pi = \mu + i\nu,\quad \varkappa = \mu - i\nu,$$

so wird

$$R^2 = A\,(x-p)\,(x-q\,[(x-\mu)^2 + \nu^2],$$

sodass μ dieselbe Bedeutung wie im § 12 hat, an Stelle von ν aber ν^2 zu setzen ist, was zweckmässig erscheint, da diese Grösse hier positiv ist. Man erhält nun zunächst aus (13) und (14)

$$\frac{x-p}{x-q} = \mp\sqrt{\frac{(p-\mu-i\nu)\;(p-\mu+i\nu)}{(q-\mu-i\nu)\;(q-\mu+i\nu)}\cdot\frac{1-z}{1+z}}$$

$$= \mp\sqrt{\frac{(p-\mu)^2+\nu^2}{(q-\mu)^2+\nu^2}\cdot\frac{1-z}{1+z}}.$$

Ueber das Zeichen gilt dieselbe Regel wie früher: nämlich wachsen x und z gleichzeitig, so enthält dieser Ausdruck das entgegengesetzte Zeichen wie $p-q$, im umgekehrten Falle dasselbe Zeichen. Ferner erhält man aus (17)

Digitized by Google

$$\frac{dx}{\sqrt{A\,(x-p)\,(x-q)\,[(x-\mu^2)+\nu^2]}}$$
$$=\pm\frac{2\sqrt{i\lambda}}{\sqrt{A\,2i\nu\,(p-q)}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1+\lambda^2 z^2)}},$$

worin das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem z und x zugleich wachsen oder nicht. Hierin ist nach § 12 $z=\cos\varphi$ und

$$\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}=k^2$$

zu setzen, dann erhält man

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{\sqrt{A\,(x-p)\,(x-q)\,[(x-\mu)^2+\nu^2]}}\\&=\mp\sqrt{\frac{2\lambda}{A\,(1+\lambda^2)\,\nu\,(p-q)}}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(20)$$

Um endlich den Modul zu bestimmen, zieht man zuerst aus (15) die Gleichung

$$\frac{1-i\lambda}{1+i\lambda}=\pm\sqrt{\frac{(p-\mu-i\nu)\,(q-\mu+i\nu)}{(p-\mu+i\nu)\,(q-\mu-i\nu)}},$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$(p-\mu)\,(q-\mu)+\nu^2=u,\quad \nu\,(p-q)=v$$

setzt,

$$\frac{1-i\lambda}{1+i\lambda}=\pm\sqrt{\frac{u+iv}{u-iv}}.\quad\ldots\ldots\quad(21)$$

Hier muss bei der Bestimmung des Zeichens zugleich auf die Grösse A Rücksicht genommen und dasselbe so gewählt werden, dass der in (20) enthaltene Ausdruck

$$\frac{2\lambda}{A\,(1+\lambda^2)\,\nu\,(p-q)}$$

positiv wird. Multiplicirt man in (21) Zähler und Nenner links mit $1-i\lambda$ und rechts mit $\sqrt{u+iv}$, so erhält man

$$\frac{1-\lambda^2-2\lambda i}{1+\lambda^2}=\pm\frac{u+vi}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

und daraus

$$\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}=\pm\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}};\quad\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}=\mp\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Da nun $v=\nu\,(p-q)$ ist, so ergiebt sich

$$\frac{2\lambda}{(1+\lambda^2)\,\nu\,(q-p)}=\mp\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

und dieser Ausdruck muss daher dasselbe Zeichen wie A er-

Digitized by Google

halten, d. h. das obere, wenn A negativ ist, das untere, wenn A positiv ist. Ferner erhält man

$$\frac{2\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{\sqrt{u^2+v^2} \mp u}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

also

$$k^2 = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{\sqrt{u^2+v^2} \mp u}{2\sqrt{u^2+v^2}},$$

worin, weil hier das obere und untere Zeichen dem oberen und unteren Zeichen des vorigen Ausdrucks entsprechen muss, ebenfalls dasjenige Zeichen zu wählen ist, welches der Grösse A zukommt.

Es war hier $z = \cos\varphi$ gesetzt, also muss dafür gesorgt werden, dass z ein echter Bruch bleibt. Da nun der Ausdruck $(1-z^2)(1+\lambda^2 z^2)$ für die Werthe $+1$, -1, $+\frac{1}{i\lambda}$, $-\frac{1}{i\lambda}$ verschwindet, so sind auch hier p und q diejenigen Werthe von x, welche den reellen Werthen $+1$ und -1 von z entsprechen. Nennt man aber a die grössere und b die kleinere der beiden reellen Wurzeln, so wird das Gebiet von $+\infty$ bis $-\infty$ in die beiden Intervalle

$$a \cdots b \text{ und } b \cdots \mp\infty \cdots a$$

getheilt, welche von den Grenzen eines Integrals nicht überschritten werden, wenn dasselbe reell ist. Um nun zu bewirken, dass z zwischen $+1$ und -1 liege, hat man wie früher nur nöthig, die Substitution so einzurichten, dass x von p nach q fortschreitet, während z von $+1$ nach -1 geht.

Ist also 1) $a > x > b$, so muss man, wenn x und z gleichzeitig abnehmen sollen, setzen:

$$p = a, \quad q = b;$$

soll aber x wachsen, während z abnimmt, umgekehrt

$$p = b, \quad q = a.$$

Ist 2) $x > a$ oder $< b$, so hat man in dem Falle der gleichzeitigen Abnahme von x und z

$$p = b, \quad q = a$$

zu setzen, weil alsdann x von b unaufhörlich abnehmend und durch $\mp\infty$ nach a fortschreitend gedacht werden muss. Wächst dagegen x bei abnehmendem z, so hat man umgekehrt

$$p = a, \quad q = b$$

zu setzen.

Digitized by Google

Der Fall, dass das Radical vom dritten Grade ist und eine reelle Wurzel besitzt, erledigt sich wieder leicht dadurch, dass man wie im Vorigen eine Wurzel unendlich setzt.

Der Fall zweier reeller und zweier imaginärer Wurzeln tritt bei der Rectification der Lemniscate ein. Die Gleichung dieser Curve, bezogen auf diejenigen rechtwinkligen Axen, welche sie in vier congruente Theile theilen, lautet, wenn mit a die halbe Axe bezeichnet wird,

$$(y^2 + x^2)^2 + a^2 (y^2 - x^2) = 0.$$

Noch einfacher wird sie, wenn man Polarcoordinaten einführt und

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi$$

setzt. Dann verwandelt sie sich in

$$r^2 - a^2 (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) = 0 \text{ oder } r = \pm a \sqrt{\cos 2\psi}. \quad (22)$$

Nun ist, wenn ds das Differential des Bogens bezeichnet,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\psi^2.$$

Aus (22) aber folgt

$$dr = \mp \frac{a \cdot \sin 2\psi}{\sqrt{\cos 2\psi}} d\psi, \quad \frac{d\psi}{dr} = \mp \frac{r}{a^2 \sqrt{1 - \frac{r^4}{a^4}}},$$

$$ds = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^4}{a^4}}}.$$

Setzt man jetzt

$$\frac{r}{a} = z,$$

so ist z, da r nicht grösser als a werden kann, ein echter Bruch, und man erhält

$$ds = \pm \frac{a\, dz}{\sqrt{1 - z^4}}.$$

Hier hat das elliptische Integral schon von selbst die gewünschte Form, denn es schreibt sich sogleich

$$ds = \pm \frac{a\, dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 + z^2)}}.$$

Daher ist $\lambda^2 = 1$ und folglich $k^2 = \frac{1}{2}$. Mithin erhält man durch $z = \cos \varphi$

$$ds = \mp a \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Dieses Integral mit dem speciellen Werth $\sqrt{\frac{1}{2}}$ des Moduls k

Digitized by Google

ist dadurch historisch merkwürdig, dass an ihm die ersten Entdeckungen über elliptische Integrale gemacht worden sind.

Um auch noch kurz des 3ten Falles, in welchem alle 4 linearen Factoren des Radicals R imaginär sind, Erwähnung zu thun, so bringen wir in Erinnerung, dass dieser Fall schon im § 12 abgemacht worden ist. Es erhellt nun aber auch, dass der Umstand, dass hier das Gebiet der Werthe von x nicht durch das Vorhandensein reeller Werthe, für welche R verschwindet, in Intervalle getheilt wird, mit der Substitution $\operatorname{tg} \varphi = z$, welche der Grösse z alle möglichen Werthe anzunehmen erlaubt, ganz im Einklange ist.

Vierter Abschnitt.

Von den drei Gattungen elliptischer Integrale.

§ 17.

Wir haben uns im Vorigen lediglich mit der Reduction des Integrals

$$\int \frac{dx}{R},$$

in welchem R die Quadratwurzel aus einem Ausdruck des vierten oder dritten Grades bedeutet, beschäftigt, und es ist gezeigt worden, dass man immer ein solches Integral auf die Form

$$C \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

bringen kann, worin C eine Constante und k einen echten Bruch bezeichnet. Die dabei anzuwendende Substitution war stets von der Form

$$x = \frac{a + bz}{c + dz},$$

wenn a, b, c, d constante Grössen bezeichnen, und für z hatte man in den drei Fällen, dass die Gleichung $R^2 = 0$ vier oder zwei oder keine reellen Wurzeln hat, resp. sin φ,

Digitized by Google

$\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$ zu setzen, so dass die Substitutionsformeln in den drei erwähnten Fällen resp. von den Formen

$$x = \frac{a + b\sin\varphi}{c + d\sin\varphi}, \quad x = \frac{a + b\cos\varphi}{c + d\cos\varphi}, \quad x = \frac{a + b\operatorname{tg}\varphi}{c + d\operatorname{tg}\varphi} \quad (23)$$

sind.

Wir gehen nun zu der Betrachtung derjenigen elliptischen Integrale über, welche im Zähler noch mit einer rationalen Function von x behaftet sind, welches, wie § 11 gezeigt wurde, die allgemeinste Form ist, auf welche die elliptischen Integrale stets reducirt werden können, nämlich die Form

$$\int \frac{F(x)\,dx}{R},$$

wo $F(x)$ eine algebraische rationale Function bezeichnet. Indem man die Substitutionen (23) anwendet, geht in den drei Fällen der Beschaffenheit von R das obige Integral in eine der Formen

$$\int \frac{f(\sin\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \frac{f(\cos\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \frac{f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \quad (24)$$

über, und es ist klar, da die Substitutionen (23) linear sind, dass die in den Zählern vorkommenden Functionen f wiederum rational sein werden.

Es soll nun zuerst gezeigt werden, dass, wenn diese Functionen f ungerade Functionen sind, die vorstehenden Integrale aufhören, elliptische zu sein, und auf Logarithmen, cyclometrische oder algebraische Functionen führen. Eine ungerade rationale Function hat nämlich die Eigenschaft, dass sie gleich dem Product aus einer geraden rationalen Function in die Variable ist; eine gerade rationale Function aber ist stets eine rationale Function des Quadrats der Variablen. Bedeutet daher f eine ungerade und F eine beliebige rationale Function, so hat man

$$f(u) = u \cdot F(u^2).$$

In diesem Falle nehmen also die drei Integrale (24) die Formen

$$\int \frac{\sin\varphi F(\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \frac{\cos\varphi F(\cos^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \frac{\operatorname{tg}\varphi F(\operatorname{tg}^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$

an. Setzt man nun in denselben

$$\sin^2\varphi = z,$$

Digitized by Google

wodurch

$$\cos^2\varphi = 1 - z, \quad \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{z}{1-z}, \quad d\varphi = \frac{dz}{2\sqrt{z(1-z)}}$$

wird, so erhält man

$$\frac{\sin\varphi\, F(\sin^2\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{z}\, F(z)\, dz}{2\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}} = \frac{F(z)\, dz}{2\sqrt{(1-z)(1-k^2z)}},$$

$$\frac{\cos\varphi\, F(\cos^2\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{1-z}\, F(1-z)\, dz}{2\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}} = \frac{F(1-z)\, dz}{2\sqrt{z(1-k^2z)}},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi\, F(\operatorname{tg}^2\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{\frac{z}{1-z}}\, F\left(\frac{z}{1-z}\right) dz}{2\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}} = \frac{F\left(\frac{z}{1-z}\right) dz}{2(1-z)\sqrt{1-k^2z}}.$$

In keinem dieser Integrale übersteigt nun die Grösse unter dem Quadratwurzelzeichen den zweiten Grad, sie führen daher sämmtlich entweder auf algebraische oder cyclometrische Functionen oder Logarithmen und sind nicht elliptische Integrale.

Bedeutet ferner in den Integralen (24) f eine beliebige rationale Function, so kann man dieselbe immer in eine gerade und eine ungerade Function zerlegen. Denn man hat, was auch f sein möge, immer die identische Gleichung

$$f(u) = \tfrac{1}{2}[f(u) + f(-u)] + \tfrac{1}{2}[f(u) - f(-u)].$$

Die Function $f(u) + f(-u)$ ist aber eine gerade Function, da sie ungeändert bleibt, wenn man $-u$ statt u setzt, und andrerseits $f(u) - f(-u)$ eine ungerade Function, da sie den entgegengesetzten Werth annimmt, wenn $-u$ statt u gesetzt wird. Hieraus geht nun hervor, dass die Integrale (24) sich im Allgemeinen in zwei Theile zerlegen, von denen der eine kein elliptisches Integral ist. Nach Absonderung dieses Theiles haben wir es daher nur noch mit Integralen zu thun, welche im Zähler eine gerade rationale Function von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ oder $\operatorname{tg}\varphi$ enthalten. Wie oben bemerkt, sind aber gerade rationale Functionen stets rationale Functionen des Quadrats der Variablen, daher sind die Integrale, mit denen wir uns zu beschäftigen haben, wenn F eine beliebige rationale Function bezeichnet, und das Zeichen $\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ wieder eingeführt wird, die folgenden:

Digitized by Google

$$\int \frac{F(\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \int \frac{F(\cos^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \int \frac{F(\mathrm{tg}^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Da endlich von den Grössen $\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$, $\mathrm{tg}^2\varphi$ jede durch irgend eine derselben rational ausgedrückt werden kann, so sind diese drei Formen nicht mehr wesentlich von einander verschieden, sondern können auf einander reducirt werden. Wir knüpfen daher unsere weiteren Betrachtungen an eine derselben an, wozu wir die erste wählen, also das Integral

$$\int \frac{F(\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Eine rationale Function besteht im Allgemeinen aus einer ganzen und einer echt gebrochenen Function; letztere kann wieder in Partialbrüche zerlegt werden; daher kann man sagen, dass die Function $F(\sin^2\varphi)$ aus einem Aggregat von Gliedern von der Form

$$M(m + \sin^2\varphi)^\mu$$

bestehe, worin der Exponent μ eine positive oder negative ganze Zahl oder Null, und die Coefficienten M und m reelle oder imaginäre Constanten sind. Es sei besonders hervorgehoben, dass bei der Zerlegung einer gebrochenen Function in Partialbrüche mit Nennern von vorstehender Form letztere auch imaginär werden können. Wir werden darauf späterhin Rücksicht zu nehmen haben. Hienach zerlegt sich das Integral (26) in eine Summe von Integralen von der Form

$$M\int \frac{(m + \sin^2\varphi)^\mu\,d\varphi}{\Delta\varphi},$$

und es lässt sich nun zeigen, dass jedes Integral von dieser Form sich auf drei Formen zurückführen lässt, die entstehen, wenn entweder

$$\mu = 0 \text{ oder } \mu = 1 \text{ oder } \mu = -1$$

ist, d. h. auf die drei Formen

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \int \frac{(m + \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \int \frac{d\varphi}{(m + \sin^2\varphi)\,\Delta\varphi},$$

welches die von *Legendre* festgestellten drei Gattungen elliptischer Integrale sind.

Dazu führt eine Reductionsformel, die sich aus der identischen Gleichung

Digitized by Google

$$(27)\quad \cdots \quad \begin{cases} (m+\sin^2\varphi)^\mu \sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi \\ =\int_0^\varphi \frac{d\,[(m+\sin^2\varphi)^\mu \sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi]}{d\varphi}\,d\varphi \end{cases}$$

ergiebt. Führt man hier die Differentiation rechter Hand aus, so erhält man unter dem Integralzeichen folgenden Ausdruck, der in $d\varphi$ multiplicirt ist,

$$2\mu\,(m+\sin^2\varphi)^{\mu-1}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\Delta\varphi +$$
$$(m+\sin^2\varphi)^\mu\left[\cos^2\varphi\,\Delta\varphi - \sin^2\varphi\,\Delta\varphi - \frac{k^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta\varphi}\right],$$

und multiplicirt man den ganzen Ausdruck mit $\Delta\varphi$, so erhält man unter dem Integralzeichen als Factor von $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ den Ausdruck

$$(28)\quad \begin{cases} 2\mu\,(m+\sin^2\varphi)^{\mu-1}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\Delta^2\varphi + \\ (m+\sin^2\varphi)^\mu\,[\cos^2\varphi\,\Delta^2\varphi - \sin^2\varphi\,\Delta^2\varphi - k^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi]. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$m+\sin^2\varphi = v,$$

wodurch

$$\sin^2\varphi = v-m,\quad \cos^2\varphi = 1-v+m,\quad \Delta^2\varphi = 1-k^2v+k^2m$$

wird, und substituirt dies in (28), so verwandelt sich dieser Ausdruck in folgenden:

$$-2\mu\,A\cdot v^{\mu-1} + (2\mu+1)\,B\cdot v^\mu - (2\mu+2)\,C\cdot v^{\mu+1} + (2\mu+3)\,k^2\cdot v^{\mu+2},$$

worin zur Abkürzung

$$A = m\,(1+m)\,(1+k^2m)$$
$$B = 1+2m+2k^2m+3k^2m^2$$
$$C = 1+k^2+3k^2m$$

gesetzt ist. Dieser Ausdruck nun, mit $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ multiplicirt und zwischen den Grenzen 0 und φ integrirt, bildet die rechte Seite der Gleichung (27). Bezeichnet man also mit V_μ das Integral

$$\int_0^\varphi \frac{v^\mu\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^\varphi \frac{(m+\sin^2\varphi)^\mu\,d\varphi}{\Delta\varphi} = V_\mu,$$

Digitized by Google

so erhält man die gesuchte Reductionsformel

$$\left.\begin{array}{l}(m+\sin^2\varphi)^\mu \sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi = -2\mu A V_{\mu-1} + \\ (2\mu+1)BV_\mu - (2\mu+2)CV_{\mu+1} + (2\mu+3)k^2V_{\mu+2}.\end{array}\right\} \quad (29)$$

Mittelst derselben kann man jedes Integral V_μ mit einem beliebigen Exponenten μ auf die folgenden drei

$$V_0,\ V_1 \text{ und } V_{-1}$$

zurückführen, denn für $\mu = 0$ oder $\mu = -1$ erhält man V_2 oder V_{-2} durch diese drei ausgedrückt; für $\mu = 1$ erhält man V_3 ausgedrückt durch V_2, V_1, V_0; aber V_2 war schon durch V_0, V_1, V_{-1} ausgedrückt, also kann man auch V_3 durch die nämlichen drei Integrale ausdrücken. Ebenso erhält man für $\mu = -2$, V_{-3} ausgedrückt durch V_{-2}, V_{-1}, V_0 und also auch durch V_{-1}, V_0, V_1. Fährt man auf diese Weise fort, so ergiebt sich, dass man für jedes beliebige μ das Integral V_μ durch V_0, V_1, V_{-1} ausdrücken kann.

Zwei ähnliche Reductionsformeln kann man erhalten, wenn man von den beiden anderen der Integrale (25) ausgeht. Dieselben lassen sich auch aus (29) ableiten, wenn man einmal $\cos\psi = \sin\varphi$ und das andere Mal $i\,\mathrm{tg}\,\psi = \sin\varphi$ und zugleich $-m' = m$ setzt.

Hiedurch ist nun nachgewiesen, dass man jedes elliptische Integral im allgemeinsten Sinne, d. h. jedes Integral einer rationalen Function der Variablen und einer Quadratwurzel aus einem Ausdruck vierten oder dritten Grades, theils auf algebraische, cyclometrische oder logarithmische Functionen, theils auf eine, oder zwei, oder alle drei Gattungen elliptischer Integrale im engeren Sinne

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},\quad \int\frac{(m+\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi},\quad \int\frac{d\varphi}{(m+\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} \quad (30)$$

zurückführen kann. Diese drei Formen sind nun diejenigen, welchen *Legendre* der Reihe nach die Namen: elliptisches Integral der ersten, der zweiten und der dritten Gattung gegeben hat.

Wenn in dem Integral (26) die Function F eine ganze Function ist, so lässt sich leicht zeigen, dass die dritte Gattung fortfällt, und das Integral sich allein auf V_0 und V_1, also auf die erste und zweite Gattung allein reducirt. Wenn nämlich F eine ganze Function ist, so hat der Exponent μ

Digitized by Google

nur positive Werthe. Setzt man nun in (29) zuerst $\mu = 0$, so erhält man, weil dann das Glied, welches $V_{\mu-1}$ enthält, verschwindet,

$$\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi = BV_0 - 2CV_1 + 3k^2V_2.$$

Hiedurch kann man also zunächst V_2 auf V_1 und V_0 zurückführen. Setzt man ferner $\mu = 1$, so folgt

$$(m + \sin^2\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi = -2AV_0 + 3AV_1 - 4CV_2 + 5k^2V_3,$$

wodurch V_3 auf V_0, V_1 und V_2 und damit ebenfalls auf V_0 und V_1 reducirt wird; fährt man so fort, so sieht man, dass die dritte Gattung V_{-1} niemals vorkommt, so dass das Integral (26), wenn es im Zähler eine ganze Function von $\sin^2\varphi$ enthält, in der That nur auf elliptische Integrale erster und zweiter Gattung führt.

Eine besondere Erwähnung verdienen ausserdem diejenigen Fälle, in welchen der Coefficient A verschwindet, weil dann die sämmtlichen Integrale V_μ, auch für die negativen Werthe von μ, nur auf die erste und zweite Gattung und niemals auf die dritte Gattung führen. Diese Fälle treten ein, wenn

$$1)\ m = 0,\ \ 2)\ m = -1,\ \ 3)\ m = -\frac{1}{k^2}$$

ist, und dabei verwandelt sich $m + \sin^2\varphi$ resp. in

$$\sin^2\varphi,\qquad -\cos^2\varphi,\qquad -\frac{\Delta^2\varphi}{k^2}.$$

Da nämlich für $A = 0$ aus der Reductionsformel (29) das Glied, welches $V_{\mu-1}$ enthält, herausfällt, und ausserdem für $\mu = -1$ auch der Coefficient $2\mu + 2$ von $V_{\mu+1}$ verschwindet, so enthält die Reductionsformel in diesem Falle nur noch die Integrale V_{-1} und V_1. Das erstere kann daher durch das letztere ausgedrückt werden. Da nun alle Integrale V_μ sich sich auf V_{-1}, V_0, V_1 reduciren lassen, so kommt man schliesslich auf die Integrale erster und zweiter Gattung, V_0 und V_1 zurück, und die dritte Gattung fällt gänzlich fort. Wir beabsichtigen später, von diesen Formeln Gebrauch zu machen, und wollen daher das dazu Nöthige hier beibringen. Setzt man in (29) zunächst $\mu = -1$, so erhält man

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{m + \sin^2\varphi} = 2AV_{-2} - BV_{-1} + k^2V_1.$$

Digitized by Google

Nun ergeben sich in den drei erwähnten Fällen nach und nach folgende Werthe:

1	2	3
$m = 0$	$m = -1$	$m = -\frac{1}{k^2}$
$A = 0$	$A = 0$	$A = 0$
$B = 1$	$B = -k'^2$	$B = \frac{k'^2}{k^2}$

$$m + \sin^2\varphi = \sin^2\varphi, \quad m + \sin^2\varphi = -\cos^2\varphi, \quad m + \sin^2\varphi = -\frac{\Delta^2\varphi}{k^2}$$

$$V_1 = \int \frac{\sin^2\varphi \cdot d\varphi}{\Delta\varphi} \qquad V_1 = -\int \frac{\cos^2\varphi \cdot d\varphi}{\Delta\varphi} \qquad V_1 = -\frac{1}{k^2}\int \frac{\Delta^2\varphi \cdot d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$V_{-1} = \int \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \qquad V_{-1} = -\int \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \qquad V_{-1} = -k^2\int \frac{1}{\Delta^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Man erhält daher in den drei fraglichen Fällen folgende Formeln:

$$1)\ \operatorname{cotg}\varphi\,\Delta\varphi = -\int \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + k^2\int \frac{\sin^2\varphi \cdot d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$2)\ -\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\varphi = -k'^2\int \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - k^2\int \frac{\cos^2\varphi \cdot d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$3)\ -\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi} = k'^2\int \frac{1}{\Delta^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int \Delta\varphi \cdot d\varphi$$

und hieraus

$$1)\ \int \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\operatorname{cotg}\varphi \cdot \Delta\varphi + k^2\int \frac{\sin^2\varphi \cdot d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$2)\ \int \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta\varphi}{k'^2} - \frac{k^2}{k'^2}\int \frac{\cos^2\varphi \cdot d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$3)\ \int \frac{1}{\Delta^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\frac{k^2}{k'^2}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1}{k'^2}\int \Delta\varphi\, d\varphi.$$

§ 18.

Wir gehen nun dazu über anzugeben, welche Ausdrücke man als die Normalformen für die elliptischen Integrale der drei Gattungen aufgestellt hat. Für die erste Gattung bildet das erste der Integrale (30) selbst die Normalform und wir bringen nur das von *Legendre* dafür eingeführte Zeichen in Erinnerung, wonach

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F(\varphi)$$

Digitized by Google

gesetzt wird. Da dies schon § 3 erörtert worden ist, so handeln wir sogleich von der zweiten Gattung.

Die zweite Gattung.

Diese entspringt aus dem zweiten der Integrale (30), nämlich

$$(31) \quad \cdots\cdots \int \frac{(m + \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta\varphi},$$

und *Legendre* hat dasjenige Integral als Normalform gewählt, welches entsteht, wenn $m = -\frac{1}{k^2}$ angenommen wird. Obiger Ausdruck geht dann nämlich in

$$-\frac{1}{k^2}\int \frac{\Delta^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = -\frac{1}{k^2}\int \Delta\varphi\, d\varphi$$

über. Das Integral $\int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi$ hat nun *Legendre* zur Normalform für die zweite Gattung gewählt und mit $E(\varphi)$ bezeichnet. Da der Buchstabe E, wie bald erhellen wird, in etwas veränderter Weise als Functionsbuchstabe verwendet werden soll, so wollen wir die *Legendre*'sche Function E mit E_1 bezeichnen. Demgemäss setzen wir

$$\int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi = E_1(\varphi).$$

Wenn die obere Grenze den Werth $\frac{\pi}{2}$ hat, so nennt man das Integral das vollständige elliptische Integral der zweiten Gattung. *Legendre* hatte es mit E^1 bezeichnet. Wir wählen dafür den einfachen Buchstaben E und setzen also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi\, d\varphi = E_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = E.$$

Unser ursprüngliches Integral der zweiten Gattung (31) drückt sich nun leicht durch die Normalform aus. Man hat nämlich

$$\sin^2\varphi = \frac{1 - \Delta^2\varphi}{k^2}, \quad m + \sin^2\varphi = \frac{1 + m\,k^2 - \Delta^2\varphi}{k^2},$$

Digitized by Google

und erhält daher

$$\int_0^{\varphi} \frac{(m + \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1 + m k^2}{k^2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1}{k^2} \int_0^{\varphi} \Delta\varphi\, d\varphi,$$

oder mit den abkürzenden Zeichen

$$\int_0^{\varphi} \frac{(m + \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1 + m k^2}{k^2} F(\varphi) - \frac{1}{k^2} E_1(\varphi).$$

Hiebei ist zu bemerken, dass, wenn man sagt, ein Integral führe auf die zweite Gattung, dabei nicht ausgeschlossen ist, dass der Ausdruck auch die erste Gattung enthalten kann. Dasselbe gilt auch von der dritten Gattung. Sagt man, ein Integral führt auf die dritte Gattung, so kann der Ausdruck auch die erste und zweite Gattung enthalten.

Von dem Integrale $E_1(\varphi)$ haben die elliptischen Integrale überhaupt ihren Namen erhalten, weil jenes Integral die Länge eines elliptischen Bogens ausdrückt. Ist nämlich

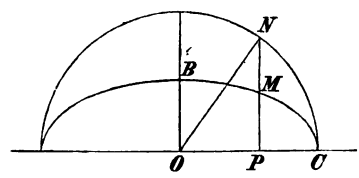
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf ihre Hauptaxen, und nimmt man $a > b$ an, so erhält man nach den bekannten Regeln den Bogen s der Ellipse ausgedrückt durch das Integral

$$s = \frac{1}{a} \int_0^{x} \frac{[a^4 - (a^2 - b^2)\, x^2]\, dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)\, [a^4 - (a^2 - b^2)\, x^2]}},$$

und dieser ist dann von dem Scheitel B (Fig. 3) der kleinen Axe an gerechnet. Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen besteht hier, wie man sieht, aus vier reellen linearen Factoren, und zwar liegt x für reelle Punkte der Elllipse zwischen $-a$ und $+a$. Die Reduction auf die Normalform ergiebt sich hier ohne Weiteres; denn man wird erreichen, dass z zwischen -1 und $+1$ liegt, wenn man

Fig. 3.



$$\frac{x}{a} = z$$

setzt. Da sich nun das Integral schreiben lässt

Digitized by Google

$$s = \int_0^x \frac{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2}\right) dx}{\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2}\right)}},$$

so erhält man sogleich die gewünschte Form, wenn man

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = k^2$$

setzt. Dann ist also der Modul gleich der numerischen Excentricität der Ellipse und daher ein echter Bruch. Man erhält nun

$$s = a \int_0^z \frac{(1 - k^2 z^2)\, dz}{\sqrt{(1 - z^2)\,(1 - k^2 z^2)}},$$

und setzt man endlich

$$z = \sin \varphi, \text{ also } x = a \sin \varphi,$$

so wird

$$s = a \int_0^\varphi \Delta \varphi \, d\varphi = a\, E_1(\varphi).$$

Demnach stellt in der That das elliptische Integral der zweiten Gattung $E_1(\varphi)$ den vom Scheitel B der kleinen Axe an gerechneten Bogen BM einer Ellipse dar, deren halbe grosse Axe der Einheit, und deren numerische Excentricität dem Modul gleich ist. Die geometrische Bedeutung des Winkels φ ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung $x = a \sin \varphi$. Denn beschreibt man aus dem Mittelpunkte O mit der halben grossen Axe einen Kreis, verlängert die Ordinate PM, bis der Kreis in N geschnitten wird, und zieht ON, so ist BON gleich dem Winkel φ. Derselbe ist also das Complement desjenigen Winkels, welcher in der Astronomie die excentrische Anomalie genannt zu werden pflegt. Für den elliptischen Quadranten BC wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und daher der Quadrant $= a\,E$. Das vollständige elliptische Integral der zweiten Gattung stellt demnach einen elliptischen Quadranten dar.

§ 19.

Nachdem durch die Umkehrung des elliptischen Integrals der ersten Gattung die Einführung der eigentlichen elliptischen Functionen gewonnen war, wurde statt der Amplitude φ das Integral der ersten Gattung selbst, also wenn man wie früher

Digitized by Google

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u$$

setzt, die Grösse u das Argument für die elliptischen Functionen. Diese Grösse führte *Jacobi* nun auch als Argument für die Integrale zweiter Gattung ein. Diese werden dann Integrale elliptischer Functionen, und man kann sie zum Unterschiede von den einfachen Functionen

$$\sin am\, u,\ \cos am\, u,\ \Delta am\, u, \text{ etc.}$$

elliptische Transcendenten nennen. Da nämlich $\varphi = am\, u$ und (nach § 4) $d\varphi = \Delta am\, u\, du$ ist, so erhält man

$$\int_0^{\varphi} \Delta\varphi\, d\varphi = \int_0^{u} \Delta^2 am\, u\, du.$$

Diese Function soll mit $E(u)$ bezeichnet werden, so dass $E_1(\varphi) = E(u)$ und

$$\int_0^{u} \Delta^2 am\, u\, du = E(u)$$

ist. Das vollständige Integral tritt dann ein, wenn u den Werth K annimmt, daher ist auch

$$E = \int_0^{K} \Delta^2 am\, u\, du = E(K).$$

Es ist von Interesse, auch diejenigen Integrale, welche die Quadrate der übrigen einfachen elliptischen Functionen enthalten, durch die Transcendente $E(u)$ auszudrücken. Um diese Ausdrücke zu erhalten, bilden wir zuerst die entsprechenden Integrale in φ, ausgedrückt durch $E_1(\varphi)$. Nun ist

$$\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \int \frac{1 - \Delta^2\varphi}{k^2} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

also

$$\int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{k^2} F(\varphi) - \frac{1}{k^2} E_1(\varphi) \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

Daraus folgt sofort

$$\int_0^{\varphi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{-k'^2 F(\varphi) + E_1(\varphi)}{k^2} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

Digitized by Google

Endlich hat man

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \int \frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta\varphi} - \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Hier kann nun die zweite der S. 67 entwickelten Reductionsformeln angewendet werden. Mit gleichzeitiger Benutzung von (33) erhält man dann

$$\int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{tg}^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{k'^2}\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\varphi + F(\varphi) - \frac{1}{k'^2}E_1(\varphi) - F(\varphi)$$

$$= \frac{1}{k'^2}\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\varphi - \frac{1}{k'^2}E_1(\varphi).$$

Benutzt man ferner dieselben Reductionsformeln für die Fälle, wo die Quadrate der trigonometrischen Functionen im Nenner stehen, und integrirt in den Fällen, wo die untere Grenze Null die Function unendlich machen würde, zwischen den Grenzen φ und $\frac{\pi}{2}$, so ist

$$\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\,\Delta\varphi} = \operatorname{cotg}\varphi\,\Delta\varphi + k^2 \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi},$$

also mit Benutzung von (32)

$$\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\,\Delta\varphi} = \operatorname{cotg}\varphi\,\Delta\varphi + K - E - F(\varphi) + E_1(\varphi).$$

Ferner ist wie oben

$$(34)\quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta\varphi} = \frac{1}{k'^2}\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\varphi + F(\varphi) - \frac{1}{k'^2}E_1(\varphi)$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta^2\varphi\cdot\Delta\varphi} = -\frac{k^2}{k'^2}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1}{k'^2}E_1(\varphi);$$

endlich

$$\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi\,\Delta\varphi} = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\,\Delta\varphi} - \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$= \operatorname{cotg}\varphi\,\Delta\varphi + K - E - F(\varphi) + E_1(\varphi) - K + F(\varphi)$$

$$= \operatorname{cotg}\varphi\,\Delta\varphi - E + E_1(\varphi).$$

Digitized by Google

Führt man nun in diesen Formeln überall u als Argument ein, so erhält man folgende Formeln.

$$\int_0^u \Delta^2 am\, u\, du = E(u)$$

$$\int_0^u \sin^2 am\, u\, du = \frac{u - E(u)}{k^2}$$

$$\int_0^u \cos^2 am\, u\, du = \frac{-k'^2 u + E(u)}{k^2}$$

$$\int_0^u \operatorname{tg}^2 am\, u\, du = \frac{\operatorname{tg} am\, u\, \Delta am\, u - E(u)}{k'^2}$$

$$\int_0^u \frac{du}{\Delta^2 am\, u} = -\frac{k^2}{k'^2} \frac{\sin am\, u \cos am\, u}{\Delta am\, u} + \frac{E(u)}{k'^2}$$

$$\int_u^K \frac{du}{\sin^2 am\, u} = \operatorname{cotg} am\, u\, \Delta am\, u + K - u - E + E(u)$$

$$\int_0^u \frac{du}{\cos^2 am\, u} = \frac{\operatorname{tg} am\, u\, \Delta am\, u + k'^2 u - E(u)}{k'^2}$$

$$\int_u^K \frac{du}{\operatorname{tg}^2 am\, u} = \operatorname{cotg} am\, u\, \Delta am\, u - E + E(u).$$

§ 20.

Auf eine der im vorigen § gegebenen Formeln stützt sich der Ausdruck für die Länge eines Bogens einer Hyperbel durch elliptische Integrale, welche ebenfalls nur bis auf die zweite Gattung steigen.

Drückt man die Gleichung einer Hyperbel bezogen auf ihre Hauptaxen in gewöhnlicher Weise aus, nämlich

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so wird der gesuchte Ausdruck am einfachsten hergeleitet, wenn man zunächst in dem Integral, das den Bogen der Hyperbel ausdrückt, die Ordinate y als unabhängige Variable

Digitized by Google

einführt. Man erhält dann durch eine leichte Rechnung für den vom positiven Scheitel an gerechneten Bogen S den Ausdruck

$$S = \frac{1}{b}\int_0^y \frac{(b^4 + (a^2 + b^2)\,y^2)\,dy}{\sqrt{(b^2 + y^2)\,(b^4 + (a^2 + b^2)\,y^2)}}.$$

Hier sind, wie man sieht, alle vier linearen Factoren des Radicals imaginär; zugleich ist die Veränderlichkeit von y in keine Grenzen eingeschlossen, sondern y kann alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen. Man kann nun leicht das Differential, abgesehen von dem Zähler $b^4 + (a^2 + b^2)\,y^2$, auf die Form

$$\frac{dz}{\sqrt{(1 + z^2)\,(1 + \lambda^2 z^2)}}$$

bringen, und da nach § 12 alsdann z einer Tangente gleich zu setzen ist, so darf auch z alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen. Zu berücksichtigen hat man nur (§ 12), dass $\lambda^2 < 1$ werde. Man erhält nun zunächst

$$S = \int_0^y \frac{\left(1 + \frac{a^2 + b^2}{b^4}\,y^2\right) dy}{\sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right)\left(1 + \frac{a^2 + b^2}{b^4}\,y^2\right)}}$$

und wird dann sofort auf die gewünschte Form geführt, wenn man

$$\text{entweder } \frac{y^2}{b^2} = z^2 \quad \text{oder} \quad \frac{a^2 + b^2}{b^4}\,y^2 = z^2$$

setzt. Allein aus den Betrachtungen des § 12 geht hervor, dass λ^2 in dem einen Falle grösser und in dem andern kleiner als 1 werden wird. In der That, setzt man $\frac{y^2}{b^2} = z^2$, so wird $\frac{a^2 + b^2}{b^4}\,y^2 = \frac{a^2 + b^2}{b^2}\,z^2$ und daher $\lambda^2 = \frac{a^2 + b^2}{b^2}$ grösser als 1. Setzt man aber

$$\frac{a^2 + b^2}{b^4}\,y^2 = z^2,$$

so wird $\frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2}{a^2 + b^2}\,z^2$, also

$$\lambda^2 = \frac{b^2}{a^2 + b^2},$$

und dieser Werth ist kleiner als 1. Es muss also die letztere Substitution angewendet werden, und mit ihr erhält man

$$S = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\int_0^z \frac{(1 + z^2)\,dz}{\sqrt{(1 + z^2)\,(1 + \lambda^2 z^2)}}.$$

Digitized by Google

Nun ist ferner zu setzen (§ 12)

$$z = \operatorname{tg} \psi, \quad k^2 = 1 - \lambda^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2},$$

und dann erhält man nach leichten Reductionen

$$S = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^2 \psi \, \Delta\psi}.$$

Der Modul k ist hier der reciproke Werth der numerischen Excentricität der Hyperbel; ersetzt man die Axe b durch denselben, so ist

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = k, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = k', \quad b = \frac{ak'}{k};$$

damit wird dann ferner, weil $y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} z$, und $z = \operatorname{tg} \psi$ war,

$$y = \frac{ak'^2}{k} \operatorname{tg} \psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

und

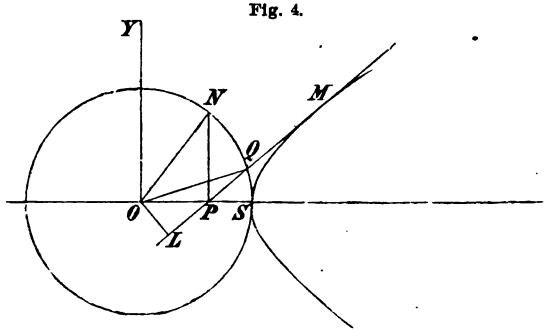
$$S = \frac{ak'^2}{k} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^2 \psi \, \Delta\psi}.$$

Substituirt man nun den unter (34) § 19 ermittelten Werth dieses Integrals, so erhält man, durch die Normalformen der elliptischen Integrale ausgedrückt,

$$S = \frac{a}{k} \operatorname{tg} \psi \, \Delta\psi + \frac{ak'^2}{k} F(\psi) - \frac{a}{k} E_1(\psi) \quad \ldots \quad (36)$$

Es bleibt jetzt noch übrig, die geometrische Bedeutung des Winkels ψ aufzusuchen. Aus dem Ausdruck (35) für y

Fig. 4.



und der Gleichung der Hyperbel folgt

$$x = a\sqrt{1 + k'^2 \operatorname{tg}^2 \psi} = \frac{a \, \Delta\psi}{\cos \psi}.$$

Digitized by Google

Bezeichnet ferner α den Winkel, welchen die Tangente ML (Fig. 4) im Endpunkte M des Hyperbelbogens mit der Abscissenaxe bildet, so ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2 x}{a^2 y},$$

oder, wenn man b, x, y durch k, k', ψ ausdrückt,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta \psi}{k \sin \psi}$$

und hieraus folgt

$$\cos \alpha = k \sin \psi \qquad \sin \alpha = \Delta \psi.$$

Die Tangente ML möge die Abscissenaxe in P durchschneiden, bezeichnet ferner O den Mittelpunkt der Hyperbel, so ergiebt sich leicht (z. B. durch Betrachtung der Gleichung der Tangente)

$$OP = \frac{a^2}{x}.$$

Fällt man nun endlich aus dem Mittelpunkte O ein Perpendikel OL auf die Tangente, so ist

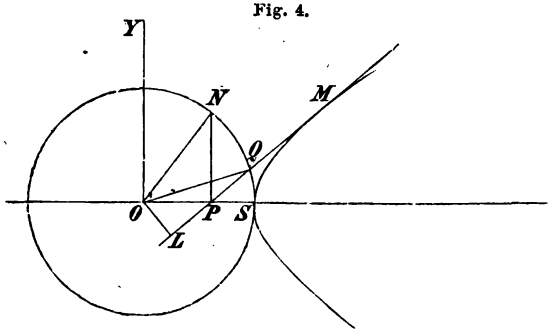
$$OL = OP. \sin \alpha = \frac{a^2 \sin \alpha}{x};$$

substituirt man aber darin die obigen Ausdrücke für $\sin \alpha$ und x, so folgt

$$OL = a \cos \psi.$$

Dadurch ergiebt sich die Bedeutung von ψ. Beschreibt man nämlich aus dem Mittelpunkte O der Hyperbel einen Kreis mit der Halbaxe a als Radius, und nennt Q den Punkt, in welchem

Fig. 4.



die Tangente ML diesen Kreis schneidet, so st $OQ = a$, und daher ψ der Winkel, den OQ mit dem Perpendikel OL bildet,

$$\psi = QOL.$$

Digitized by Google

Aus dem Vorstehenden lässt sich auch die geometrische Bedeutung des ersten Gliedes $\frac{a}{k}\,\mathrm{tg}\,\psi\,\Delta\psi$ in dem Ausdrucke (36) für den Hyperbelbogen herleiten und zeigen, dass derselbe das Stück LM der Tangente, welches von dem Berührungspunkte M und der aus dem Mittelpunkte gefällten Senkrechten OL begrenzt wird, ausdrückt. Denn man hat

$$LM = LP + PM = OP\cdot\cos\alpha + \frac{x - OP}{\cos\alpha}$$
$$= \frac{x}{\cos\alpha} - \frac{OP\sin^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Substituirt man nun für $OP\sin\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, x die oben gefundenen Ausdrücke, so ergiebt sich

$$LM = \frac{a\,\Delta\psi}{k\sin\psi\cos\psi} - \frac{a\cos\psi\,\Delta\psi}{k\sin\psi},$$

und daraus

$$LM = \frac{a}{k}\,\mathrm{tg}\,\psi\,\Delta\psi.$$

§ 21.

Die dritte Gattung.

Die dritte Gattung entspringt aus dem dritten der S. 65 unter (30) aufgestellten Integrale, nämlich

$$\int \frac{d\varphi}{(m + \sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}.$$

Wir sahen schon § 17, dass dieses Integral für gewisse specielle Werthe von m nur auf die zweite Gattung führt. Wenn aber m beliebig sein kann, tritt jener Fall nicht mehr ein, sondern man erhält eine neue Gattung elliptischer Integrale. Diese hängen daher ausser von der Amplitude φ und dem Modul noch von einer dritten Grösse ab. Als Normalform hat nun *Legendre* die folgende

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}$$

gewählt, dieselbe mit $\Pi(\varphi, n)$ bezeichnet, und die neu hinzukommende Grösse n den Parameter des Integrals genannt. Da *Jacobi* das Zeichen Π beibehalten, aber in gänzlich veränderter Weise angewendet hat, so wollen wir, um die Verwirrung der Zeichen zu vermeiden, die *Legendre*'sche Nor-

Digitized by Google

malform der elliptischen Integrale dritter Gattung mit Π_1 bezeichnen, also setzen

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\, \Delta\varphi} = \Pi_1(\varphi, n).$$

Das obige Integral reducirt sich sehr leicht auf dieses, denn da $m + \sin^2 \varphi = m\,(1 + \frac{1}{m} \sin^2 \varphi)$ ist, so erhält man sofort

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(m + \sin^2 \varphi)\, \Delta\varphi} = \frac{1}{m}\, \Pi_1\left(\varphi, \frac{1}{m}\right).$$

Die Form, welche *Jacobi* als die Normalform für die elliptischen Integrale der dritten Gattung wählte, indem er auch diese als Integrale elliptischer Functionen darstellte, ist folgende. Er setzte

$$\int_0^{u} \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a\, \Delta am\, a \sin^2 am\, u\, du}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u} = \Pi(u, a).$$

Der Zusammenhang derselben mit der *Legendre*'schen Form ergiebt sich folgendermassen. Da man hat

$$\frac{1}{1 + n \sin^2 \varphi} = 1 - \frac{n \sin^2 \varphi}{1 + n \sin^2 \varphi},$$

so ist

$$\Pi_1(\varphi, n) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\, \Delta\varphi} = F(\varphi) - \int_0^{\varphi} \frac{n \sin^2 \varphi\, d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\, \Delta\varphi}.$$

Jacobi gab nun der dritten Gattung in dem Falle eine reelle Form, wenn der Parameter n ein negativer echter Bruch und absolut genommen kleiner als k^2 ist, indem er setzte

$$n = -k^2 \sin^2 am\, a;$$

und nach *Jacobi* nennt man jetzt die Grösse a den Parameter. Führt man nun u und a statt φ und n in die letzte Formel ein, so erhält man

$$\Pi_1(\varphi, n) = u + \int_0^{u} \frac{k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u\, du}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u}$$

und folglich

$$\Pi_1(\varphi, n) = u + \frac{\operatorname{tg} am\, a}{\Delta am\, a}\, \Pi(u, a), \quad [n = -k^2 \sin^2 am\, a],$$

Digitized by Google

wodurch der Uebergang von der *Legendre*'schen zur *Jacobi*schen Normalform gegeben ist.

Aus der Definition der Transcendenten Π folgen sogleich einige Eigenschaften derselben; zunächst ist

$$\Pi(0, a) = 0.$$

Da ferner (§ 7, S. 17)

$$\sin am\, K = 1,\ \cos am\, K = 0,\ \Delta am\, K = k',$$

so folgt

$$\Pi(u, K) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Für $a = iK'$ werden $\sin am\, a$, $\cos am\, a$ und $\Delta am\, a$ unendlich gross, also ist auch

$$\Pi(u, iK') = \infty.$$

Endlich ist (§ 10, S. 29)

$$\sin am\,(K \pm iK') = \frac{1}{k},\ \cos am\,(K \pm iK') = \mp \frac{ik'}{k},$$

$$\Delta am\,(K \pm iK') = 0,$$

mithin

$$\Pi(u, K \pm iK') = 0.$$

Um den Werth der Transcendenten Π für den Werth K des Arguments u zu ermitteln, müssen wir zuerst einen wichtigen Satz beweisen, der in einer Relation besteht, die sich ergiebt, wenn man das Argument u mit dem Parameter a vertauscht. Diese geht aus der Betrachtung der identischen Gleichung

$$\Pi(u, a) - uE(a) = \int_0^u \int_0^a \frac{\partial^2 [\Pi(u, a) - uE(a)]}{\partial u\, \partial a}\, du\, da \quad . \quad (38)$$

hervor. Denn man hat

$$\frac{\partial \Pi(u, a)}{\partial u} = \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a\, \Delta am\, a \sin^2 am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi(u, a)}{\partial u\, \partial a} = \frac{k^2 \sin^2 am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u} \times$$

$$[\cos^2 am\, a\, \Delta^2 am\, a - \sin^2 am\, a\, \Delta^2 am\, a - k^2 \sin^2 am\, a \cos^2 am\, a]$$

$$+ \frac{2k^4 \sin^4 am\, u \sin^2 am\, a \cos^2 am\, a\, \Delta^2 am\, a}{[1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u]^2}.$$

Ferner

$$\frac{\partial (uE(a))}{\partial u} = E(a) \text{ und } \frac{\partial^2 (uE(a))}{\partial u\, \partial a} = \frac{dE(a)}{da} = \Delta^2 am\, a.$$

Digitized by Google

Bildet man nun den rechten Theil der Gl. (38), so erhält man nach einigen Reductionen

$$\Pi(u, a) - uE(a)$$

$$= -\int_0^u\int_0^a \frac{\Delta^2 am\, a\, \Delta^2 am\, u + k^4 \sin^2 am\, a \cos^2 am\, a \sin^2 am\, u \cos^2 am\, u}{(1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u)^2}\, da\, du.$$

Nun ist ersichtlich, dass der Ausdruck rechter Hand ungeändert bleibt, wenn man a mit u vertauscht. Daher muss auch der Ausdruck links bei dieser Vertauschung ungeändert bleiben. Man hat also

$$\Pi(u, a) - uE(a) = \Pi(a, u) - aE(u)$$

oder

$$\Pi(u, a) = \Pi(a, u) + uE(a) - aE(u).$$

Diese Gleichung zeigt, dass man das Integral der dritten Gattung auf ein anderes zurückführen kann, in welchem das Argument und der Parameter mit einander vertauscht sind.

Hieraus ergiebt sich nun ein Ausdruck für das Integral dritter Gattung für den Werth $\frac{\pi}{2}$ der Amplitude, oder, was dasselbe ist, für den Werth K des Arguments. Denn da nach (37) $\Pi(a, K) = 0$ ist, so erhält man, wenn man in der vorigen Gl. K statt u setzt,

$$\Pi(K, a) = KE(a) - aE.$$

Für den Werth K des Arguments reducirt sich also die Transcendente Π auf die zweite Gattung.

Fünfter Abschnitt.

Ueber eine Substitution der zweiten Ordnung zur Reduction der elliptischen Integrale auf die Normalform.

§ 22.

Wir gehen jetzt zu der Betrachtung einer Substitution der zweiten Ordnung über, für den Fall, dass die Grösse unter dem Quadratwurzelzeichen aus lauter reellen linearen Factoren

Digitized by Google

besteht. Diese Substitution ist einer besondern Aufmerksamkeit werth, einmal, weil sie in vielen Fällen einfachere Resultate liefert, als eine Substitution der ersten Ordnung, dann aber, weil wir hier die Quelle finden werden, aus welcher die in den §§ 8 und 10 angewendeten Transformationen fliessen, und die uns dann auch dazu führen wird, die elliptischen Functionen mit einem Modul, der grösser als 1 ist, oder mit imaginärem Modul auf elliptische Functionen mit reellem Modul, kleiner als 1, zurückzuführen.

Bezeichnen wir wieder wie früher mit

$$\int \frac{dx}{R}$$

das zu transformirende Integral, worin

$$R = \sqrt{A\,(x-p)\,(x-q)\,(x-r)\,(x-s)}$$

gesetzt sei, so ist dieses Integral auf die Form

$$C\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}} \quad \cdots\cdots \quad (39)$$

zu bringen. Dieses kann nun durch eine Substitution von der Form

$$x = \frac{a+bz^2}{c+dz^2} \quad \cdots\cdots \quad (40)$$

geschehen. Man kann nämlich den Ausdruck (39) leicht in einen andern umwandeln, in dem z^2 die Variable ist. Setzt man nämlich

$$z^2 = y,$$

und nimmt an, dass z der positiven Wurzel aus y gleich sei, so wird

$$dz = \tfrac{1}{2}\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

mithin

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}} = \tfrac{1}{2}\frac{dy}{\sqrt{y\,(1-y)\,(1-k^2y)}}.$$

Dadurch erhalten wir unter dem Wurzelzeichen einen Ausdruck vom 3ten Grade, welcher für die Werthe 0, 1 und $\frac{1}{k^2}$ von y verschwindet. Die 4te Wurzel der Gleichung $y\,(1-y)\,(1-k^2y) = 0$ können wir alsdann, wie früher (§ 14) erwähnt worden ist, als unendlich gross ansehen. Demnach sind

Digitized by Google

$$0,\ 1,\ \frac{1}{k^2},\ \infty$$

die Werthe von y, welche den Werthen

$$p,\ q,\ r,\ s$$

von x entsprechen müssen, und wir wollen annehmen, dass dies auch in der angegebenen Reihenfolge der Fall sei. Damit k^2 ein echter Bruch werde, haben wir nur $\frac{1}{k^2}$ zwischen 1 und ∞ liegend anzunehmen, und damit y oder z^2 ein echter Bruch bleibe, hat man an die Stelle von p und q, welche den Werthen 0 und 1 von y entsprechen sollen, diejenigen beiden Wurzeln der Gl. $R^2 = 0$ zu setzen, zwischen welchen die Grenzen des Integrals liegen. Es greifen hier wieder die Bemerkungen des § 13 Platz, und in derselben Weise wie dort bestimmt man, welche Wurzeln man an die Stelle von r und s zu setzen hat. Auch ergeben sich hier wieder in jedem Falle zwei Substitutionen, indem bei der einen x und y gleichzeitig abnehmen oder wachsen, bei der anderen nicht.

Substituirt man nun in die Gleichung (40), die, durch y ausgedrückt, lautet

$$x = \frac{a + by}{c + dy},$$

nach und nach die Werthe p, q, r, s von x und die ihnen entsprechenden Werthe $0,\ 1,\ \frac{1}{k^2},\ \infty$ von y, so erhält man vier Gleichungen, die zur Bestimmung der drei Verhältnisse der Grössen a, b, c, d und des Werthes von k^2 ausreichen. Man erhält dadurch nämlich

$$p = \frac{a}{c},\quad q = \frac{a+b}{c+d},\quad r = \frac{k^2 a + b}{k^2 c + d},\quad s = \frac{b}{d}.$$

Indem man in die beiden mittleren Gleichungen die aus der ersten und vierten folgenden Werthe

$$a = pc,\ b = sd$$

einsetzt, ergiebt sich

$$q = \frac{pc + sd}{c + d} = \frac{p + s\frac{d}{c}}{1 + \frac{d}{c}},$$

und daraus

$$\frac{d}{c} = \frac{p - q}{q - s}.$$

Digitized by Google

Ebenso erhält man

$$r = \frac{k^2pc+sd}{k^2c+d} = \frac{k^2p+s\frac{p-q}{q-s}}{k^2+\frac{p-q}{q-s}},$$

und daraus

$$k^2(r-p) = (s-r)\frac{p-q}{q-s},$$

$$k^2 = \frac{(p-q)(r-s)}{(p-r)(q-s)}. \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

Ferner erhält man

$$x = \frac{pc+sdy}{c+dy} = \frac{p+s\frac{p-q}{q-s}y}{1+\frac{p-q}{q-s}y},$$

$$x = \frac{p(q-s)+s(p-q)y}{q-s+(p-q)y} \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

und dann, wenn man der Kürze wegen den Nenner

$$q-s+(p-q)y = N$$

setzt,

$$\left.\begin{aligned} x-p &= -\frac{(p-s)(p-q)y}{N} \\ x-q &= \frac{(p-q)(q-s)-(p-q)(q-s)y}{N} = \frac{(p-q)(q-s)(1-y)}{N} \\ x-r &= \frac{(p-r)(q-s)-(r-s)(p-q)y}{N} = \frac{(p-r)(q-s)(1-k^2y)}{N} \\ x-s &= \frac{(p-s)(q-s)}{N} \end{aligned}\right\} (43)$$

also

$$A(x-p)(x-q)(x-r)(x-s) = -\frac{A(p-q)^2(p-r)(p-s)^2(q-s)^3y(1-y)(1-k^2y)}{N^4}.$$

Ferner wird

$$dx = \frac{[(q-s)+(p-q)y]s(p-q)-[p(q-s)+s(p-q)y](p-q)}{N^2}dy,$$

$$= -\frac{(p-q)(q-s)(p-s)}{N^2}dy,$$

also

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^2}{A(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)} &= \frac{1}{-A(p-r)(q-s)}\cdot\frac{dy^2}{y(1-y)(1-k^2y)} \\ &= \frac{4}{-A(p-r)(q-s)}\cdot\frac{dz^2}{(1-z^2)(1-k^2z^2)} \end{aligned}\right\} (44)$$

wovon die positive oder negative Wurzel zu nehmen ist, je nachdem x mit y gleichzeitig wachsen soll, oder nicht.

Digitized by Google

Aus den Formeln (43) kann man auch durch Division die folgenden ableiten:

$$\frac{x-p}{x-s} = -\frac{p-q}{q-s}\,y,$$
$$\frac{x-q}{x-s} = \frac{p-q}{p-s}\,(1-y),$$
$$\frac{x-r}{x-s} = \frac{p-r}{p-s}\,(1-k^2y),$$

und erhält, wenn man

$$y = z^2 = \sin^2\varphi,$$

also

$$1-y = \cos^2\varphi,\quad 1-k^2y = \Delta^2\varphi$$

setzt, daraus

$$(45)\quad \begin{cases} \sin^2\varphi = -\dfrac{q-s}{p-q}\cdot\dfrac{x-p}{x-s} \\ \cos^2\varphi = \dfrac{p-s}{p-q}\cdot\dfrac{x-q}{x-s} \\ \Delta^2\varphi = \dfrac{p-s}{p-r}\cdot\dfrac{x-r}{x-s}. \end{cases}$$

Sind die Wurzeln der Gleichung $R^2 = 0$ wieder wie früher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so dass

$$\alpha > \beta > \gamma > \delta,$$

so hat man folgendes Schema der einander entsprechenden Werthe:

1) z^2 und x nehmen gleichzeitig zu

$$z^2 = 0,\ 1,\ \frac{1}{k^2},\ \infty$$

	$x = p, q, r, s$	
$\alpha > x > \beta$	$x = \beta, \alpha, \delta, \gamma$	A negativ,
$\beta > x > \gamma$	$\gamma, \beta, \alpha, \delta$	A positiv,
$\gamma > x > \delta$	$\delta, \gamma, \beta, \alpha$	A negativ,
$\delta > x$ od. $x > \alpha$	$\alpha, \delta, \gamma, \beta$	A positiv.

2) z^2 wächst, während x abnimmt

	p, q, r, s	
$\alpha > x > \beta$	$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	A negativ,
$\beta > x > \gamma$	$\beta, \gamma, \delta, \alpha$	A positiv,
$\gamma > x > \delta$	$\gamma, \delta, \alpha, \beta$	A negativ,
$\delta > x$ od. $x > \alpha$	$\delta, \alpha, \beta, \gamma$	A positiv.

Dieses Schema zeigt, dass in allen Fällen, wo es sich um

Digitized by Google

ein reelles Integral handelt, sowohl der Ausdruck $-A(p-r)(q-s)$, als auch der für k^2 positiv wird.

Um die Anwendbarkeit dieser Transformation der zweiten Ordnung zu zeigen, wollen wir das Integral, welches in der Pendelaufgabe die Zeit angiebt, noch einmal vornehmen. Wir fanden für dasselbe § 15 (19)

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)(x-a)(x+1)}},$$

worin $x = \cos\psi$ und $a = \cos\alpha$ gesetzt war, und ψ die zur Zeit t stattfindende, und α die grösste Ablenkung des Pendels von der Verticallinie bedeutet. Es war im § 15 gezeigt worden, dass bei dieser Substitution, $\cos\psi = x$, eine Transformation der ersten Ordnung nicht auf die einfachste Form führt, dass man vielmehr bei Anwendung einer solchen $\sin\frac{1}{2}\psi$ als neue Variable einführen musste. Wir wollen nun zeigen, dass das vorstehende Integral durch die Substitution der zweiten Ordnung die einfachen Formeln liefert. Als Wurzeln des Radicals sind hier der Grösse nach geordnet anzunehmen

$$+1,\ a,\ -1,\ \infty,$$

und x liegt zwischen 1 und a. Will man nun bewirken, dass z^2 wächst, während x abnimmt, so hat man nach dem letzten Schema zu setzen

$$p = 1,\ q = a,\ r = -1,\ s = \infty,$$

und erhält dann nach (41)

$$k^2 = \frac{1-a}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha, \text{ also } k = \sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Ferner nach (45)

$$z^2 = \sin^2\varphi = -\frac{x-1}{1-a} = \frac{1-\cos\psi}{1-\cos\alpha} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}\psi}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha}, \text{ mithin}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi = \sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\varphi;$$

endlich nach (44)

$$\frac{dz^2}{-(x-1)(x-a)(x+1)} = \frac{4dz^2}{+2(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

und da die negative Wurzel zu nehmen ist, weil x und z nicht gleichzeitig wachsen,

$$\frac{dx}{\sqrt{-(x-1)(x-a)(x+1)}} = -\sqrt{2}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}};$$

Digitized by Google

endlich, weil $\varphi = 0$ wird für $x = 1$,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

welches die im § 6 und dann wieder im § 15 gegebenen Formeln sind.

§ 23.

Die im Vorigen auseinandergesetzte Methode erlaubt eine sehr wichtige Anwendung auf die Verwandlung eines Integrals von der Form

$$(46) \quad \ldots \ldots \int \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - \lambda^2 v^2)}},$$

welches zwar scheinbar die Normalform besitzt, in welchem aber der Modul λ^2 sowohl grösser als 1, als auch negativ, λ selbst also auch imaginär sein kann, und in welchem auch die Grenzen der Integration die Werthe -1 und $+1$ überschreiten. Wir werden dadurch zu den Formeln der §§ 8 und 10 geführt werden, zugleich aber auch Relationen erhalten, mittelst welcher elliptische Functionen, deren Modul grösser als 1, oder imaginär ist, auf elliptische Functionen mit reellem Modul, der ein echter Bruch ist, zurückgeführt werden.

Verwandelt man nämlich das Integral (46) ähnlich wie (39) in eines, das v^2 als Variable enthält, indem man

$$v^2 = x$$

setzt, so erhält man:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - \lambda^2 v^2)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)(1 - \lambda^2 x)}}.$$

Als Wurzeln des Radicals sind hier die Werthe

$$x = 0, \; 1, \; \frac{1}{\lambda^2}, \; \infty$$

anzusehen. Diese kann man nun auf 24 verschiedene Arten den Werthen

$$y = 0, \; 1, \; \frac{1}{k^2}, \; \infty$$

entsprechen lassen. Diese 24 Anordnungen theilen sich in 3 grosse Gruppen, zu je achten; nämlich

Digitized by Google

$\frac{1}{\lambda^2}$ zwischen 1 und ∞, so ist $\lambda^2 < 1$,
- - 0 - 1, so ist $\lambda^2 > 1$,
- - $-\infty$ - 0, so ist λ^2 negativ, also λ imag.

Jeder 3 Gruppen besteht wieder aus zwei Theilen: in den einen wachsen x und y gleichzeitig, in dem andern nimmt y, während x abnimmt. Die 4 Anordnungen jedes letzteren Theile entstehen endlich durch cyclische Vertauschung der Elemente einer dieser Anordnungen. Dadurch wird die Aufeinanderfolge nicht geändert, sondern nur bewirkt, dass nach und nach jedes Intervall der Werthe von x einem anderen Intervalle der Werthe von y entspricht. Hienach erhält man nun folgende Tabelle:

	$y = z^2 = 0, 1, \frac{1}{k^2}, \infty$.	y nimmt zu.	
	$x = v^2 = p, q, r, s$		
1)	$x = v^2 = 0, 1, \frac{1}{\lambda^2}, \infty$	x nimmt zu	$\lambda^2 < 1$,
2)	$1, \frac{1}{\lambda^2}, \infty, 0$		
3)	$\frac{1}{\lambda^2}, \infty, 0, 1$		
4)	$\infty, 0, 1, \frac{1}{\lambda^2}$		
5)	$\infty, \frac{1}{\lambda^2}, 1, 0$	x nimmt ab	
6)	$\frac{1}{\lambda^2}, 1, 0, \infty$		
7)	$1, 0, \infty, \frac{1}{\lambda^2}$		
8)	$0, \infty, \frac{1}{\lambda^2}, 1$		
9)	$0, \frac{1}{\lambda^2}, 1, \infty$	x nimmt zu	$\lambda^2 > 1$,
10)	$\frac{1}{\lambda^2}, 1, \infty, 0$		
11)	$1, \infty, 0, \frac{1}{\lambda^2}$		
12)	$\infty, 0, \frac{1}{\lambda^2}, 1$		

Digitized by Google

13)	$x = v^2 = \infty, 1, \frac{1}{\lambda^2}, 0$	x nimmt ab	$\lambda^2 > 1$,
14)	$1, \frac{1}{\lambda^2}, 0, \infty$		
15)	$\frac{1}{\lambda^2}, 0, \infty, 1$		
16)	$0, \infty, 1, \frac{1}{\lambda^2}$		
17)	$0, 1, \infty, \frac{1}{\lambda^2}$	x nimmt zu	λ^2 negativ.
18)	$1, \infty, \frac{1}{\lambda^2}, 0$		
19)	$\infty, \frac{1}{\lambda^2}, 0, 1$		
20)	$\frac{1}{\lambda^2}, 0, 1, \infty$		
21)	$\frac{1}{\lambda^2}, \infty, 1, 0$	x nimmt ab	
22)	$\infty, 1, 0, \frac{1}{\lambda^2}$		
23)	$1, 0, \frac{1}{\lambda^2}, \infty$		
24)	$0, \frac{1}{\lambda^2}, \infty, 1$		

Wir stehen davon ab, alle Formeln, welche sich aus der vollständigen Anwendung sämmtlicher 24 Fälle ergeben, hier aufzustellen, zumal wir dabei auf schon Bekanntes stossen, und Wiederholungen sich einstellen würden. Wir wählen vielmehr Einiges als das Wichtigste aus, was dann die Art der Anwendung des obigen Schema zur Genüge erläutern wird.

Bei der Normalform des elliptischen Integrals erster Gattung werden die positiven Werthe der Variablen durch die Werthe 1 und $\frac{1}{k}$, für welche die Quadratwurzel verschwindet, in Intervalle getheilt. Nun wissen wir schon, dass der Werth des zwischen den Grenzen 0 und 1 genommenen Integrals gleich dem vierten Theil des reellen Periodicitätsindex ist. Es entsteht daher die Aufgabe, die Werthe des Integrals für die Grenzen $1 \cdot\cdot \frac{1}{k}$ und $\frac{1}{k} \cdot\cdot \infty$ zu finden. Um diese zu bestimmen, brauchen wir nur in unserem Schema diejenigen

Digitized by Google

Transformationen herauszusuchen, bei welchen x alle Werthe von 0 bis 1 durchläuft, während y einmal von 1 bis $\frac{1}{k^2}$ und dann von $\frac{1}{k^2}$ bis ∞ sich bewegt. Diese finden sich in Nr. 4 und Nr. 3. Stellen wir daher für diese beiden Transformationen die Formeln zusammen.

Nr. 4.
$$y = 1 \cdots \frac{1}{k^2},$$
$$x = 0 \cdots 1.$$

Hier ist $p = \infty$, $q = 0$, $r = 1$, $s = \frac{1}{\lambda^2}$, daher nach (41)

$$k^2 = \frac{1 - \frac{1}{\lambda^2}}{-\frac{1}{\lambda^2}} = 1 - \lambda^2, \text{ also } \lambda = k',$$

dann nach (44)

$$\frac{dx^2}{x(x-1)\left(x - \frac{1}{k^2}\right)} = \frac{1}{-\frac{1}{k^2}} \cdot \frac{dy^2}{y(1-y)(1-k^2y)}$$

und

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k'^2x)}} = \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(1-k^2y)}}.$$

Führt man nun v und z statt x und y ein, so ergiebt sich

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = iK'. \quad \cdots \quad (47)$$

Nr. 3.
$$y = \frac{1}{k^2} \cdots \infty,$$
$$x = 0 \cdots 1,$$
$$p = \frac{1}{\lambda^2},\ q = \infty,\ r = 0,\ s = 1,$$
$$\lambda = k,$$
$$\frac{dx^2}{\left(x - \frac{1}{k^2}\right)x(x-1)} = \frac{1}{+\frac{1}{k^2}} \cdot \frac{dy^2}{y(1-y)(1-k^2y)},$$

folglich

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K.$$

Digitized by Google

Die nämlichen Ausdrücke hätte man auch aus Nr. 6 und Nr. 5 erhalten können. Auch würden die Formeln (45) in jedem Falle die nöthigen Substitutionen liefern. Das obige Schema gewährt überhaupt den Nutzen, die zu einem bestimmten Zwecke dienenden Substitutionen mit leichter Mühe auffinden zu können. So ergeben sich hier z. B. die § 8 und § 10 angewendeten Substitutionen

$$\sin\varphi = i\,\mathrm{tg}\,\psi, \quad \sin\varphi = \frac{\cos\psi}{\Delta\psi}.$$

Setzt man nämlich wie früher $\sin^2\varphi = y$ und ausserdem $\sin^2\psi = x$, so lautet die erste Formel

$$y = -\frac{x}{1-x}$$

und zeigt, das y von 0 bis $-\infty$ abnimmt, während x von 0 bis 1 wächst. Daraus ergiebt sich, dass man, um zu dieser Formel zu gelangen, Nr. 8 anzuwenden, also $p = 0$, $q = \infty$, $r = \frac{1}{\lambda^2}$, $s = 1$ zu setzen hat; damit ergiebt sich $\lambda = k'$, und die Formeln (45) ergeben die Formeln des § 8.

Bei der andern in § 10 angewendeten Substitution ist

$$y = \frac{1-x}{1-k^2x}.$$

Während x von 0 bis 1 wächst, nimmt also y von 1 bis 0 ab. Folglich ist Nr. 7 anzuwenden, wodurch man die Formeln (15) § 10 erhalten würde. Aehnlich könnte man die sämmtlichen Formeln des § 10 hieraus wieder erhalten, wobei freilich die Vorzeichen noch besonders ermittelt werden müssten.

§ 24.

Die obige Tabelle liefert uns auch das Mittel, Moduln in Betracht zu ziehen, welche grösser als Eins oder rein imaginär sind, nämlich sie liefert uns diejenigen Substitutionen, durch welche elliptische Integrale mit solchen Moduln auf elliptische Integrale mit echt gebrochenem Modul reducirt werden. Geht man dann durch Umkehrung der elliptischen Integrale zu den elliptischen Functionen über, so liefern die nämlichen Substitutionsformeln auch die Beziehungen, mittelst welcher elliptische Functionen mit unecht gebrochenem oder rein imaginärem Modul auf elliptische Functionen mit echt gebrochenem Modul reducirt werden.

Digitized by Google

In der Tabelle beziehen sich nun Nr. 9 bis 16 auf Moduln, die grösser als Eins sind. Wir brauchen nur den ersten dieser Fälle, also Nr. 9 zu betrachten. Darin ist

$$p = 0,\ q = \frac{1}{\lambda^2},\ r = 1,\ s = \infty.$$

Damit ergiebt (41)

$$k^2 = \frac{-\frac{1}{\lambda^2}}{-1},\ \text{also}\ \lambda = \frac{1}{k};$$

es ist also λ der reciproke Werth des als echt gebrochen vorausgesetzten Moduls k; ferner erhält man aus (45), wenn man zugleich $x = \sin^2\psi$ setzt,

$$\sin^2\varphi = \frac{x}{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{x}{k^2} = \frac{\sin^2\psi}{k^2},$$

$$\cos^2\varphi = \frac{x - \frac{1}{\lambda^2}}{-\frac{1}{\lambda^2}} = 1 - \frac{1}{k^2}\,x^2 = \Delta^2\left(\psi,\ \frac{1}{k}\right),$$

$$\Delta^2\varphi = \frac{x-1}{-1} = 1 - x = \cos^2\psi,$$

oder

$$\sin\psi = k\sin\varphi,\quad \cos\psi = \Delta\varphi,\quad \Delta\left(\psi, \frac{1}{k}\right) = \cos\varphi \cdot \qquad (48)$$

Endlich liefert die Formel (44)

$$\frac{dx^2}{x\,(x-k^2)\,(x-1)} = \frac{dy^2}{y\,(1-y)\,(1-k^2y)},$$

und da x und y gleichzeitig von 0 an wachsen,

$$\frac{1}{k}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)\,(1-\frac{1}{k^2}x)}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y\,(1-y)\,(1-k^2y)}},$$

oder wenn man zugleich $v^2 = x$ und $z^2 = y$ einführt,

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1-v^2)\,(1-\frac{1}{k^2}v^2)}} = k\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}} \cdot \qquad (49)$$

oder auch

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta\left(\psi, \frac{1}{k}\right)} = k\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Hierdurch ist das elliptische Integral mit dem Modul $\frac{1}{k}$ (grösser als Eins) zurückgeführt auf das elliptische Integral mit dem Modul k (kleiner als Eins).

Digitized by Google

Um nun zu den entsprechenden Formeln für die elliptischen Functionen zu gelangen, setzt man

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u,$$

so ist erstlich $\varphi = am\, u$, sodann aber

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\Delta\left(\psi, \frac{1}{k}\right)} = ku, \text{ und daher } \psi = am\left(ku, \frac{1}{k}\right).$$

Substituirt man dies in die Formeln (48), so erhält man die gesuchten Beziehungen zwischen den elliptischen Functionen, nämlich

$$(50) \quad \ldots \quad \left.\begin{aligned} \sin am\left(ku, \tfrac{1}{k}\right) &= k \sin am\, u \\ \cos am\left(ku, \tfrac{1}{k}\right) &= \Delta\, am\, u \\ \Delta\, am\left(ku, \tfrac{1}{k}\right) &= \cos am\, u \end{aligned}\right\}$$

Um auch den Werth des vollständigen Integrals für den Modul $\frac{1}{k}$ zu erhalten, brauchen wir nur aus Nr. 9 der Tabelle zu entnehmen, dass z^2 die beiden Intervalle von 0 bis 1 und von 1 bis $\frac{1}{k^2}$ durchläuft, während v^2 sich von 0 nach 1 bewegt. Man erhält daher aus (49)

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)\left(1-\frac{v^2}{k^2}\right)}} = k\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + k\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

also mit Berücksichtigung von (47)

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)\left(1-\frac{v^2}{k^2}\right)}} = k\,(K + iK').$$

Dasselbe Resultat hätte man auf ganz anderem Wege auch aus der ersten der Formeln (50) ableiten können. Das vollständige Integral ist nämlich dasjenige Argument der Function Sinus Amplitude, für welches die letztere den Werth 1 an-

Digitized by Google

nimmt. Nun zeigt aber die erste der Formeln (50), dass $\sin am\left(ku, \frac{1}{k}\right)$ den Werth 1 erhält, wenn $\sin am\, u = \frac{1}{k}$ ist, und dies tritt nach S. 29 ein, wenn $u = K + iK'$ ist. Demnach ist

$$\sin am\left(k\,(K + i\,K'), \frac{1}{k}\right) = 1,$$

und folglich $k\,(K + i\,K')$ der Werth des vollständigen Integrals für den Modul $\frac{1}{k}$. Man kann dies auch so ausdrücken: Wenn k in $\frac{1}{k}$ übergeht, so geht K in $k\,(K + iK')$ über.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung rein imaginärer Moduln. Diese treten in Nr. 17 bis 24 unserer Tabelle auf. Wir ziehen es aber vor, diesen Fall direct zu erledigen, da er Gelegenheit giebt, noch einen andern Punkt zur Sprache zu bringen. Bildet man nämlich das Complement des vorhin betrachteten Moduls $\frac{1}{k}$, so ist dasselbe gleich

$$\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}} = \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k} = \frac{ik'}{k},$$

und liefert daher einen rein imaginären Modul. Nun kann man aber (nach § 8) zu den elliptischen Functionen mit complementärem Modul übergehen, wenn man das Argument rein imaginär werden lässt. Wir werden daher zu den gesuchten Beziehungen gelangen, wenn wir in den Formeln (50) zuerst das Argument u in iu übergehen lassen und dann mit Hülfe des § 8 die Functionen mit imaginärem Argument in Functionen mit reellem Argument und dem complementären Modul verwandeln. Man setze demnach in (50) zuerst iu statt u, so erhält man, wenn man zugleich noch die Formel für die Tangente hinzufügt,

$$\sin am\left(iku, \frac{1}{k}\right) = k \sin am\, iu,$$

$$\cos am\left(iku, \frac{1}{k}\right) = \Delta\, am\, iu,$$

$$\Delta\, am\left(iku, \frac{1}{k}\right) = \cos am\, iu,$$

$$\operatorname{tg} am\left(iku, \frac{1}{k}\right) = \frac{k \sin am\, iu}{\Delta\, am\, iu}.$$

Digitized by Google

Wendet man nun hier sowohl auf der linken, wie auf der rechten Seite die Formeln (12) des § 8 an, so ergiebt sich, indem $\frac{ik'}{k}$ das Complement von $\frac{1}{k}$ ist,

$$i \operatorname{tg} am\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = ik \operatorname{tg} am\,(u, k'),$$

$$\frac{1}{\cos am\left(ku, \frac{ik'}{k}\right)} = \frac{\Delta am\,(u, k')}{\cos am\,(u, k')},$$

$$\frac{\Delta am\left(ku, \frac{ik'}{k}\right)}{\cos am\left(ku, \frac{ik'}{k}\right)} = \frac{1}{\cos am\,(u, k')},$$

$$i \sin am\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = \frac{ik \sin am\,(u, k')}{\Delta am\,(u, k')},$$

und hieraus

$$\sin am\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = \frac{k \sin am\,(u, k')}{\Delta am\,(u, k')},$$

$$\cos am\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = \frac{\cos am\,(u, k')}{\Delta am\,(u, k')},$$

$$\Delta am\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = \frac{1}{\Delta am\,(u, k')},$$

$$\operatorname{tg} am\left(ku, \frac{ik'}{k}\right) = k \operatorname{tg} am\,(u, k').$$

Den Werth des vollständigen Integrals für den Modul $\frac{ik'}{k}$ ermitteln wir hier in ähnlicher Weise wie vorhin bei dem Modul $\frac{1}{k}$. Man erhält nämlich aus der ersten Formel für $\sin am\left(ku, \frac{ik'}{k}\right)$ den Werth 1, wenn man $u = K'$ setzt; denn da

$$\sin am\,(K', k') = 1, \qquad \Delta am\,(K', k') = k$$

ist, so ist

$$\sin am\left(kK', \frac{ik'}{k}\right) = 1,$$

und folglich ist kK' der Werth des vollständigen Integrals für den Modul $\frac{ik'}{k}$, d. h.

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)\left(1 + \frac{k'^2}{k^2} v^2\right)}} = kK'.$$

Digitized by Google

Mit Berücksichtigung des Früheren kann man nun Folgendes als Resultat aussprechen:

Wenn k in $\frac{1}{k}$ übergeht,
so geht k' über in $\frac{ik'}{k}$,
ferner K in $k(K+iK')$,
und K' in kK'.

Sechster Abschnitt.

Das Additionstheorem.

§ 25.

Wir gehen nun zur Betrachtung derjenigen Eigenschaft der elliptischen Integrale über, welche historisch den Ausgangspunkt für die Entwickelung der Theorie gebildet hat, zu dem sogenannten Additionstheorem. Dieses lässt sich, vorerst allerdings noch in beschränkter Weise, folgendermassen aussprechen: „Wenn man zwei elliptische Integrale erster Gattung mit gleichem Modul addirt, so ist ihre Summe wiederum ein elliptisches Integral mit dem gleichen Modul, und zwar so, dass die obere Grenze des letzteren Integrals eine algebraische Function der oberen Grenzen der beiden ersten Integrale ist.“ Oder, wendet man die Legendre'sche Bezeichnung an, so kann man sagen: Die Summe der beiden Integrale $F(\varphi)$ und $F(\psi)$ ist einem solchen dritten Integrale $F(\sigma)$ gleich, dass zwischen den trigonometrischen Functionen der drei Amplituden φ, ψ und σ eine einfache algebraische Relation besteht. Daraus wird sich dann ergeben, dass die elliptischen Functionen der Summe zweier Argumente auf einfache Weise algebraisch durch die elliptischen Functionen der einzelnen Argumente ausgedrückt werden können.

Diesen Satz entdeckte zuerst *Fagnano**) an dem speciellen

---

*) *Fagnano de Fagnani*, Metodo per misurare la lemniscata. (Giornale de' letterati d'Italia. 1718.) Die in diesem Journal enthaltenen Abhandlungen sind später unter dem Titel: *Produzioni matematiche.* 1750, gesammelt herausgegeben.

Digitized by Google

Integral, welches den Bogen der Lemniscate ausdrückt (§ 16) und lehrte dadurch die Bögen dieser Curve addiren. Alsdann bewies denselben *Euler**) für das allgemeine elliptische Integral der ersten Gattung, und *Lagrange***) gab später eine sehr elegante Ableitung dieses Theorems, wodurch er Euler's Bewunderung in hohem Grade auf sich zog.

Es wird zum Verständniss des Folgenden förderlich sein, wenn wir dieselben Betrachtungen, die uns zu dem Additionstheorem führen werden, zuerst in der Trigonometrie anstellen, und dadurch auf einem von dem gewöhnlichen ganz verschiedenen Wege zu der bekannten Fundamentalformel der Trigonometrie gelangen. Um aber zunächst diesen einzuschlagenden Weg erst auszumitteln, gehen wir von letzterer, nämlich von der bekannten Formel

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$$

aus. Aus derselben ergiebt sich die entsprechende Formel für die Arcus Sinus, wenn man

$$\sin u = x, \quad \sin v = y,$$

also

$$\cos u = \sqrt{1-x^2}, \quad \cos v = \sqrt{1-y^2},$$

und ausserdem noch

$$c = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

setzt,

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin c.$$

Drückt man nun die Arcus Sinus durch die sie darstellenden Integrale aus, so lässt sich die vorige Gleichung so schreiben:

$$(1) \quad \cdots \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}}.$$

Daraus erhellt, dass das Integral, welches den Arcus Sinus darstellt, die im Additionstheorem ausgesprochene Eigenschaft besitzt: dass nämlich die Summe zweier solcher Integrale einem dritten ähnlichen Integrale gleich ist, von der Beschaffenheit, dass die obere Grenze c des letzteren eine alge-

---

*) *Euler*, Institutiones calculi integralis. I. Sect. 2. Cap. 6.
**) *Lagrange*, Théorie des fonctions. I. § 79 ff.

Digitized by Google

braische Function der oberen Grenzen x und y der beiden ersten Integrale ist, nämlich

$$c = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}. \quad \ldots \quad (2)$$

Nun ist aber die Gleichung (1) nichts anderes, als das vollständige Integral von folgender Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0, \quad \ldots \quad (3)$$

und c die willkürliche Constante der Integration. Denn integrirt man diese Differentialgleichung Glied für Glied, und nimmt eine willkürliche Constante C so, dass die unteren Grenzen der beiden Integrale Null sind, so erhält man

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = C. \quad \ldots \quad (4)$$

Diese Constante C kann man aber durch eine andere Constante c ersetzen. In der Differentialgleichung (3) ist nämlich jede der beiden Veränderlichen x und y als eine Function der anderen zu betrachten; jedem Werth der einen entspricht daher ein Werth der andern. Bezeichnet man nun mit c denjenigen Werth von y, welcher dem Werthe $x = 0$ entspricht, und setzt diese Werthe in die Integralgleichung (4) hinein, so erhält man, weil für $x = 0$ das erste Glied verschwindet,

$$C = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}}$$

und damit die Gleichung (1).

Die Gleichung (2), die die Relation zwischen den oberen Grenzen der drei Integrale ausspricht, ist aber auch nichts anderes, als eine vollständige Integralgleichung der Differentialgleichung (3); denn sie ist eine endliche Gleichung, welche zwischen den Variablen x und y existirt, sobald diese auch durch die Differentialgleichung verbunden sind, und enthält eine willkürliche Constante c, die in der Differentialgleichung nicht enthalten ist. Jede endliche Gleichung aber, welche einer Differentialgleichung genügt, und so viele willkürliche Constanten enthält, als die Ordnung des Differentialgleichung Einheiten hat, ist eine vollständige Integralgleichuug der letzteren.

Digitized by Google

Hieraus geht nun hervor, dass man die Gleichung (2) wieder erhalten wird, wenn es gelingt, die Differentialgleichung (3) anders als durch gliedweise Quadratur zu integriren. Hat man die Gleichung (2) aber gefunden, so folgt aus ihr in Verbindung mit (1) auch umgekehrt wieder die Fundamentalformel der Trigonometrie.

Es darf nicht befremden, dass bei dieser Betrachtung die Grösse c als eine willkürliche Constante auftritt. Sie ist in der That nur insofern constant, als nach ihr in der Differentialgleichung nicht differentiirt ist, im Uebrigen ist sie veränderlich. In *Jacobi*'s grosser Abhandlung über die Differentialgleichungen*) findet sich eine Stelle, die in Beziehung auf diesen Punkt eben so treffend als lehrreich ist. Es sei daher erlaubt, dieselbe hier anzuführen. Sie lautet in der Uebersetzung so: „Es ist ein sehr wichtiger Satz der Differentialrechnung, dass Functionen, welche durch Differentialgleichungen bestimmt werden, immer mehr Variable enthalten können, als die Differentialgleichungen, aus welchen sie bestimmt werden. Diese Variabeln, welche zu denjenigen hinzukommen, die in den Differentialgleichungen enthalten sind, werden von den Analytikern willkürliche Constanten genannt; Constanten nämlich, weil auf ihre Veränderlichkeit in den gegebenen Differentialgleichungen keine Rücksicht genommen wird, und willkürlich, weil sie nicht zu denjenigen constanten Grössen gehören, die in den gegebenen Differentialgleichungen vorkommen. Man sieht aber in einer Differentialgleichung jede Grösse als constant an, nach welcher in jenen Gleichungen keine Differentiation vorgenommen ist."

Wir wollen uns nun für einen Augenblick in der Trigonometrie auf denjenigen Standpunct stellen, den wir in der Theorie der elliptischen Functionen gegenwärtig einnehmen. Wir wollen also den Zusammenhang der trigonometrischen Functionen mit den cyclometrischen Integralen als bekannt annehmen. Dagegen wollen wir die Fundamentalformel, mittelst welcher die trigonometrischen Functionen einer Summe $u + v$

*) *Jacobi*, Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis. Crelle's Journ. Bd. 23. p. 5.

Digitized by Google

durch die Functionen der einzelnen Argumente u und v ausgedrückt werden, nicht als bekannt voraussetzen, sondern diese erst durch die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

ableiten.

Es ist oben schon gezeigt worden, dass aus dieser Gleichung die folgende

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}} \quad \ldots \quad (4)$$

sich ergiebt, in welcher die willkürliche Constante c so definirt ist, dass mit c derjenige Werth von y bezeichnet wird, welcher dem Werthe $x = 0$ entspricht.

Die einfachste Methode, jene Differentialgleichung nun auf andere Weise zu integriren, rührt von *Sturm* her und besteht in folgendem Verfahren*). Schafft man aus der Gleichung (3) die Nenner fort, so erhält man zunächst

$$\sqrt{1-y^2}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0,$$

und kann dann, wenn auch jetzt die Veränderlichen nicht mehr getrennt sind, doch wieder gliedweise integriren, weil vermöge der Differentialgleichung selbst jede der beiden Variabeln x und y eine Function der anderen ist. Bezeichnet also C eine willkürliche Constante, so ist

$$\int \sqrt{1-y^2}\,dx + \int \sqrt{1-x^2}\,dy = C.$$

Jedes dieser beiden Glieder kann nun durch theilweise Integration transformirt werden. Dadurch ist

$$\int \sqrt{1-y^2}\,dx = x\sqrt{1-y^2} + \int \frac{xy\,dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dy = y\sqrt{1-x^2} + \int \frac{yx\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

und durch Addition erhält man

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \int xy\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right) = C,$$

*) Vgl. *Schlömilch*'s Zeitschrift für Mathematik Bd. 1, p. 372. Comptes rendus 1856 Nr. 21.

Digitized by Google

allein wegen der Differentialgleichung (3) verschwindet das letzte Glied, welches das Integral enthält, und man hat

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C.$$

Setzt man endlich, um die Constante C durch c zu ersetzen, gleichzeitig $x = 0$ und $y = c$, so ergiebt sich $C = c$ und daher

(5) . . . $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = c.$

Dies ist das gesuchte Integral der Differentialgleichung (3), aus dem sofort die Fundamentalformel der Trigonometrie folgt. Denn setzt man

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = u, \quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = v,$$

so folgt aus (4)

$$\int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}} = u + v.$$

Nimmt man aber von sämmtlichen Integralen die inversen Functionen, so ist

$$x = \sin u, \quad y = \sin v, \quad c = \sin(u+v),$$
$$\sqrt{1-x^2} = \cos u, \quad \sqrt{1-y^2} = \cos v;$$

mithin erhält man wirklich

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u.$$

§ 26.

Genau den im vorigen Paragraph angedeuteten Weg hat man nun auch bei den elliptischen Functionen eingeschlagen. Die erste wichtige Eigenschaft, die in Bezug auf die elliptischen Integrale zu Tage trat, bestand darin, dass es *Euler* gelang, die Differentialgleichung

(6) $$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} + \frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}} = 0,$$

die, gliedweise integrirt, auf elliptische Integrale führt, und die wir deshalb kurz die elliptische Differentialgleichung nennen wollen, auf andere Weise durch eine algebraische Relation zu integriren und dadurch zu erweisen, dass zwischen den oberen Grenzen dreier elliptischer Integrale, von

Digitized by Google

denen eines die Summe der beiden anderen ist, eine algebraische Beziehung stattfindet.

Diese Integration wird nun einfacher, wenn man die elliptischen Differentiale zuvor auf die Normalform reducirt. Wir wollen daher von dieser letzteren ausgehen und die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2y^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0 \quad \cdot \cdot (7)$$

behandeln. Wir theilen zunächst die Methode von *Sturm* mit, welche der im vorigen Paragraph angegebenen Integration der Differentialgleichung (3) ganz analog ist. *Sturm* schafft die Nenner fort und dividirt zugleich mit $1 - k^2x^2y^2$. Bezeichnet dann C eine willkürliche Constante, so liefert die gliedweise Integration

$$\int \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dx + \int \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dy = C. \quad (8)$$

Hier wird nun wieder jedes Glied durch theilweise Integration umgeformt. Wir brauchen aber die Rechnung nur bei dem ersten Gliede auszuführen, da aus diesem das zweite Glied sogleich durch Vertauschung von x und y entsteht. Bei dem ersten Gliede liefert nun die theilweise Integration

$$\int \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dx = \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2} - \int dM, \quad (9)$$

worin der Kürze wegen

$$dM = x\,d\left(\frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}\right)$$

gesetzt ist. Führt man die angedeutete Differentiation aus, so erhält man nach einigen Reductionen

$$dM = \frac{xy\,[2k^2(x^2+y^2) - (1+k^2)(1+k^2x^2y^2)]}{(1-k^2x^2y^2)^2\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\,dy + \frac{2k^2x^2y^2\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{(1-k^2x^2y^2)^2}\,dx.$$

Hierin kommen zwei in x und y symmetrische Ausdrücke vor; bezeichnet man diese mit besonderen Buchstaben, setzt man nämlich

$$P = \frac{xy\,[2k^2(x^2+y^2) - (1+k^2)(1+k^2x^2y^2)])}{(1-k^2x^2y^2)^2},$$

$$Q = \frac{2k^2x^2y^2}{(1-k^2x^2y^2)^2},$$

Digitized by Google

so wird

$$dM = \frac{P\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} + Q\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\,dx,$$

und damit giebt die Formel (9) für das erste Integral in (8)

$$\int \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dx = \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2} - \int \frac{P\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} - \int Q\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\,dx.$$

Hieraus folgt nun der Ausdruck für das zweite Integral durch Vertauschung von x und y; und da dabei P und Q ungeändert bleiben, so ist

$$\int \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dy = \frac{y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} - \int \frac{P\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \int Q\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,dy.$$

Die Addition der letzten beiden Gleichungen liefert dann vermöge (8)

$$C = \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} - \int P\left(\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\right) - \int Q\left(\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\,dx + \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,dy\right).$$

In Folge der gegebenen Differentialgleichung aber verschwinden aus diesem Ausdrucke die mit Integralzeichen behafteten Glieder. Führt man ausserdem noch die Constante c ein, indem man gleichzeitig $x = 0$ und $y = c$ setzt, so wird $C = c$, und man erhält die gesuchte Integralgleichung in folgender Gestalt

$$(10) \qquad \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} = c.$$

Andrerseits giebt die Differentialgleichung (7) durch gliedweise Integration und Einführung der Constanten c

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}},$$

und daher enthält die vorige Gleichung (10) die Beziehung,

Digitized by Google

welche zwischen den oberen Grenzen der drei Integrale stattfindet, von denen das eine die Summe der beiden anderen ist.

Gerade so, wie nun die Formel (5) zu der Fundamentalformel der Trigonometrie führt, so können wir jetzt aus der Gleichung (10) die entsprechende Fundamentalformel für die elliptischen Functionen ableiten. Setzt man nämlich

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = u, \quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = y,$$

so ist erstlich

$$\int_0^c \frac{dc}{\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}} = u + v,$$

sodann hat man

$$x = \sin am\, u, \qquad y = \sin am\, v,$$
$$\sqrt{1-x^2} = \cos am\, u, \qquad \sqrt{1-y^2} = \cos am\, v,$$
$$\sqrt{1-k^2x^2} = \Delta\, am\, u, \qquad \sqrt{1-k^2y^2} = \Delta\, am\, v,$$
$$c = \sin am\,(u+v),$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke liefert die Formel (10)

$$\sin am\,(u+v) = \frac{\sin am\, u \cos am\, v\, \Delta am\, v + \sin am\, v \cos am\, u\, \Delta am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v}.$$

Der analoge Bau dieser Formel mit der für $\sin(u+v)$ fällt sofort in die Augen, und letztere entsteht auch sogleich aus der ersteren, wenn man $k = 0$ setzt, da dann die elliptischen Functionen in trigonometrische übergehen, und die Functionen Δ gleich Eins werden.

§ 27.

Die im vorigen Paragraph mitgetheilte *Sturm*'sche Methode löst die Aufgabe der Integration der elliptischen Differentialgleichung ganz direct und lässt auch an Einfachheit nichts zu wünschen übrig. Sie leidet aber an einem Mangel, der leicht bewirken kann, dass sie beim ersten Studium keine rechte Befriedigung gewährt. Dieser Mangel besteht darin, dass vor der Integration mit dem Ausdrucke $1 - k^2x^2y^2$ dividirt werden muss. Zur Bildung dieses Ausdruckes und Division mit demselben ist keine Veranlassung ersichtlich; im Gegentheil macht das Gefühl sich geltend, dass diese Operation

Digitized by Google

nur durch die schon vorher auf andere Weise gewonnene Kenntniss des Resultats veranlasst worden ist. Daher scheint es nicht überflüssig zu sein, die Untersuchung auch ihrem historischen Gange nach zu verfolgen und zu zeigen, auf welche Weise man allmälig in den Besitz des gefundenen Resultats gelangt ist. Es ist schon bemerkt worden, dass die erste Integration der elliptischen Differentialgleichung von *Euler* herrührt. Es soll daher zuerst dessen Methode im Wesentlichen unverändert wiedergegeben werden.

Euler ist ohne Zweifel von der Bemerkung ausgegangen, dass die Differentialgleichung (3), welche auf die Arcus Sinus führt, durch Differentiation aus einer algebraischen Gleichung abgeleitet werden kann, bei welcher keine der Variablen den ersten Grad übersteigt, und die, insofern sie auch eine Constante mehr enthält als die Differentialgleichung, als das Integral der letzteren anzusehen ist. Hieran anknüpfend stellte er sich die Aufgabe, die elliptische Differentialgleichung aus einer algebraischen Gleichung abzuleiten, bei welcher keine der Variablen den zweiten Grad übersteigt. Gelang die Lösung dieser Aufgabe, und enthielt zugleich die Differentialgleichung eine Constante weniger als die endliche Gleichung, so bildete diese das vollständige Integral von jener, und es war damit zugleich eine algebraische Beziehung zwischen den oberen Grenzen der drei elliptischen Integrale gefunden.

Wir beschränken uns darauf, die Ausführung hiervon nur für den Fall zu zeigen, dass die elliptische Differentialgleichung unter den Quadratwurzeln keine ungeraden Potenzen der Variablen enthält, da die allgemeinere Gleichung (6) ganz in derselben Weise abgeleitet werden kann und dann nur einen grösseren Aufwand von Rechnung erfordert. Wir stellen uns also die Aufgabe, die Gleichung

$$(11) \quad \cdot \cdot \quad \frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2 + Ex^4}} + \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2 + Ey^4}} = 0$$

aus einer algebraischen Gleichung zwischen x und y abzuleiten, welche diese Variablen höchstens in der zweiten Potenz enthält. Man findet dann leicht, dass diese Gleichung in Beziehung auf x und y symmetrisch sein muss, damit in der Differentialgleichung die Ausdrücke in x und y die nämlichen Coefficienten erhalten, und ferner, dass die Gleichung keine

Digitized by Google

Glieder ungerader Dimension enthalten darf, da auch in der Differentialgleichung die ungeraden Potenzen von x und y fehlen. Wir versuchen daher in einer Gleichung von der Form

$$\alpha + \gamma (x^2 + y^2) + 2\delta xy + \xi x^2 y^2 = 0 \quad \cdot \cdot \quad (12)$$

die Coefficienten α, γ, δ, ξ so zu bestimmen, dass die Differentialgleichung (11) daraus folgt. Nun liefert die Differentiation der vorigen Gleichung sofort

$$(\gamma x + \delta y + \xi x y^2)\, dx + (\gamma y + \delta x + \xi x^2 y)\, dy = 0,$$

oder

$$\frac{dx}{y(\gamma + \xi x^2) + \delta x} + \frac{dy}{x(\gamma + \xi y^2) + \delta y} = 0. \quad \cdot \cdot \quad (13)$$

Giebt man aber der Gleichung (12) die beiden Formen

$$y^2 (\gamma + \xi x^2) + 2\delta xy + \alpha + \gamma x^2 = 0$$

und

$$x^2 (\gamma + \xi y^2) + 2\delta yx + \alpha + \gamma y^2 = 0,$$

so folgt durch Auflösung dieser quadratischen Gleichungen nach y und nach x

$$\left.\begin{aligned} y(\gamma + \xi x^2) + \delta x &= \sqrt{-\alpha\gamma + (\delta^2 - \gamma^2 - \alpha\xi) x^2 - \gamma\xi x^4} \\ x(\gamma + \xi y^2) + \delta y &= \sqrt{-\alpha\gamma + (\delta^2 - \gamma^2 - \alpha\xi) y^2 - \gamma\xi y^4} \end{aligned}\right\} (14)$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Differentialgleichung (13), so geht diese über in

$$\frac{dx}{\sqrt{-\alpha\gamma + (\delta^2 - \gamma^2 - \alpha\xi) x^2 - \gamma\xi x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{-\alpha\gamma + (\delta^2 - \gamma^2 - \alpha\xi) y^2 - \gamma\xi y^4}} = 0,$$

und man kann nun die Grössen α, γ, δ, ξ so bestimmen, dass die Coefficienten von x^0, x^2, x^4 den Grössen A, C, E proportional werden. Dazu braucht man nur mit Einführung eines Proportionalitätsfactors m zu setzen

$$-\alpha\gamma = Am, \quad \delta^2 - \gamma^2 - \alpha\xi = Cm, \quad -\gamma\xi = Em.$$

Hieraus lassen sich drei von den vier Coefficienten α, γ, δ, ξ bestimmen, während einer willkürlich bleibt. Wählt man γ zu dem letzteren, so ergiebt sich

$$\alpha = -\frac{Am}{\gamma}, \quad \xi = -\frac{Em}{\gamma}, \quad \delta^2 = Cm + \gamma^2 + \frac{AEm^2}{\gamma^2}.$$

Substituirt man diese Werthe in die endliche Gleichung (12), nachdem diese zuvor mit γ multiplicirt ist, so wird dieselbe

$$-Am + \gamma^2 (x^2 + y^2) + 2\sqrt{Cm\gamma^2 + \gamma^4 + AEm^2} xy - Emx^2 y^2 = 0,$$

und ist nun eine Integralgleichung der Differentialgleichung (11).

Digitized by Google

Dividirt man die vorige Gleichung noch durch m und setzt

$$\frac{\gamma^2}{m} = h,$$

so schreibt sie sich

$$(15) \quad -A + h(x^2+y^2) + 2\sqrt{Ch + h^2 + AE}\, xy - Ex^2y^2 = 0$$

und zeigt, dass in ihr eine Constante, nämlich h, vorkommt, welche in der Differentialgleichung nicht enthalten ist, dass sie also eine vollständige Integralgleichung der letzteren ist.

Um die Uebereinstimmung mit dem vorigen § zu zeigen, wollen wir jetzt $A + Cx^2 + Dx^4$ speciell gleich

$$(1 - x^2)(1 - k^2 x^2),$$

also

$$A = 1, \quad C = -(1 + k^2), \quad E = k^2$$

annehmen. Dann erhält man aus (15)

$$-1 + h(x^2+y^2) + 2\sqrt{-(1+k^2)h + h^2 + k^2}\, xy - k^2x^2y^2 = 0,$$

worin nun noch an Stelle von h die Constante c eingeführt werden muss, nämlich derjenige Werth von y, welcher $x = 0$ entspricht. Durch Einführung dieser beiden zusammengehörigen Werthe erhält man

$$-1 + hc^2 = 0, \quad \text{also} \quad h = \frac{1}{c^2},$$

und wenn man diesen Werth in die vorige Gleichung substituirt und mit c^2 multiplicirt,

$$(16) \quad -c^2 + x^2 + y^2 + 2\sqrt{1 - (1+k^2)c^2 + k^2c^4}\, xy - k^2c^2x^2y^2 = 0,$$

welche Gleichung nun in der That mit (10) identisch ist. Dies liesse sich durch Auflösung dieser Gleichung nach c direct zeigen. Leichter aber ergiebt es sich durch Herbeiziehung der Gleichungen (14). Führt man nämlich auch hier die Werthe der Verhältnisse $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\delta}{\gamma}$, $\frac{\zeta}{\gamma}$ ein, indem man für diese jetzt hat

$$\frac{\alpha}{\gamma} = -c^2, \quad \frac{\delta}{\gamma} = \sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}, \quad \frac{\zeta}{\gamma} = -k^2c^2,$$

und setzt der Kürze wegen vorübergehend

$$\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)} = \Delta(c, k),$$

so nehmen die Gleichungen (14) folgende Gestalt an:

$$y(1 - k^2c^2x^2) + \Delta(c, k)\, x = c\,\Delta(x, k),$$
$$x(1 - k^2c^2y^2) + \Delta(c, k)\, y = c\,\Delta(y, k).$$

Digitized by Google

Multiplicirt man die erste mit y, die zweite mit x und addirt, so folgt

$$y^2 + x^2 - 2k^2c^2x^2y^2 + 2\Delta(c, k)\,xy = c[y\,\Delta(x, k) + x\,\Delta(y, k)],$$

und substituirt man darin den aus (16) folgenden Werth

$$y^2 + x^2 + 2\Delta(c, k)\,xy = c^2(1 + k^2x^2y^2),$$

so erhält man

$$c^2(1 - k^2x^2y^2) = c[y\,\Delta(x, k) + x\,\Delta(y, k)],$$

oder

$$c = \frac{y\,\Delta(x, k) + x\,\Delta(y, k)}{1 - k^2x^2y^2},$$

welches die Gleichung (10) ist.

Indem *Euler* auf diesem Wege die elliptische Differentialgleichung und die für die Arcus Sinus in zwei aufeinander folgenden Capiteln integrirt und auch die Formel für die Summe zweier Arcus Sinus daraus ableitet, kann es keinem Zweifel unterliegen, dass er sich der Analogie zwischen den elliptischen Integralen und den Arcus Sinus in vollständigster Weise bewusst war. Man muss daher darüber erstaunt sein, zu sehen, um wie wenig *Euler* von der Entdeckung der elliptischen Functionen entfernt gewesen ist, und dass trotzdem der Gedanke des Ueberganges zu diesen inversen Functionen einer viel späteren Zeit vorbehalten bleiben musste.

§ 28.

Nachdem *Euler* auf indirectem Wege die algebraische Relation zwischen den oberen Grenzen der drei elliptischen Integrale entdeckt hatte, gelang es nun *Lagrange*, einen directen Weg zu finden, um zu demselben Resultat zu gelangen. Seine Methode ist besonders elegant, wenn man von der trigonometrischen Normalform der elliptischen Integrale ausgeht, und führt dann zunächst zu einer Formel, die seinen Namen führt und auch in anderer Weise bedeutsam ist. Wir behandeln daher noch die Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = 0$$

und geben die Methode von *Lagrange* der Integration derselben.

Integrirt man diese Gleichung zuerst gliedweise, indem man eine willkürliche Constante C so wählt, dass die Integrale

Digitized by Google

von Null anfangen, und bedient sich der *Legendre*'schen Bezeichnung, so erhält man

$$F(\varphi) + F(\psi) = C.$$

Ersetzt man darin wieder die Constante C durch eine andere σ, welche dadurch definirt sei, dass $\psi = \sigma$ werde, wenn man $\varphi = 0$ setzt, so ergiebt sich, da $F(0) = 0$ ist, $C = F(\sigma)$, und daher

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\sigma),$$

und die Aufgabe ist nun, die andere Relation zwischen φ, ψ und σ zu finden.

Lagrange sieht φ und ψ als Functionen einer neuen Variablen t an, die er durch die Gleichung

$$(17) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

definirt; dann folgt, weil ψ eine Function von φ, φ aber eine Function von t ist,

$$(18) \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad \text{und daher} \quad \frac{d\psi}{dt} = -\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}.$$

Durch Quadrirung und nochmaliges Differentiiren nach t ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k^2 \sin\varphi \cos\varphi, \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = -k^2 \sin\psi \cos\psi,$$
$$= -\tfrac{1}{2} k^2 \sin 2\varphi, \qquad = -\tfrac{1}{2} k^2 \sin 2\psi.$$

Nun führt *Lagrange* statt φ und ψ die Summe und Differenz dieser Grössen ein, indem er setzt

$$\varphi + \psi = p, \quad \varphi - \psi = q;$$

dann ergiebt sich durch Addition und Subtraction der vorigen Gleichungen:

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{1}{2}k^2(\sin(p+q) + \sin(p-q)) = -k^2 \sin p \cos q, \\ \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{2}k^2(\sin(p+q) - \sin(p-q)) = -k^2 \cos p \sin q. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (17) und (18) folgt ebenso

$$(20) \quad \cdot \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}, \\ \frac{dq}{dt} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}, \end{cases}$$

Digitized by Google

deren Product die Gleichung

$$\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dq}{dt} = -k^2 (\sin^2 \varphi - \sin^2 \psi)$$
$$= -k^2 \sin(\varphi + \psi) \sin(\varphi - \psi)$$
$$= -k^2 \sin p \sin q$$

liefert. Indem man nun mit dieser Gleichung in die Gleichungen (19) hineindividirt, erhält man integrable Ausdrücke, nämlich

$$\frac{\frac{d^2p}{dt^2}}{\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dq}{dt}} = \frac{\cos q}{\sin q} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{d^2p}{dt^2}}{\frac{dp}{dt}} = \frac{\cos q \cdot \frac{dq}{dt}}{\sin q},$$
$$\frac{\frac{d^2q}{dt^2}}{\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dq}{dt}} = \frac{\cos p}{\sin p} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{d^2q}{dt^2}}{\frac{dq}{dt}} = \frac{\cos p \cdot \frac{dp}{dt}}{\sin p};$$

folglich, wenn die Integrations-Constanten mit $\log \alpha$ und $\log \beta$ bezeichnet werden,

$$\left.\begin{aligned} \log \frac{dp}{dt} &= \log \cdot \sin q + \log \alpha \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{dt} = \alpha \cdot \sin q \\ \log \frac{dq}{dt} &= \log \cdot \sin p + \log \beta \quad \text{oder} \quad \frac{dq}{dt} = \beta \cdot \sin p \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit

$$\frac{dq}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dt},$$

woraus

$$\alpha \sin q \frac{dq}{dt} = \beta \sin p \frac{dp}{dt}$$

folgt, so kann man aufs Neue integriren, wobei zugleich t eliminirt wird; denn bezeichnet γ eine dritte Integrations-Constante, so erhält man

$$-\alpha \cos q = -\beta \cos p + \gamma,$$

und es handelt sich nur noch darum, die Constanten α, β und γ durch die vorhin gewählte σ auszudrücken. Indem man wieder $q = \varphi - \psi$ und $p = \varphi + \psi$ in die vorige Gleichung zurücksubstituirt, kann man diese schreiben:

$$-\alpha \cos(\varphi - \psi) = -\beta \cos(\varphi + \psi) + \gamma, \quad \cdots \quad (22)$$

und setzt man darin $\varphi = 0$ und $\psi = \sigma$, so ergiebt sich zunächst

$$\gamma = (\beta - \alpha) \cos \sigma.$$

Um auch α und β durch σ auszudrücken, kehren wir zu den

Digitized by Google

Gleichungen (20) zurück, die sich mit Hülfe der Gleichungen (21) so schreiben lassen:

$$(23)\quad \begin{cases} \alpha \sin(\varphi - \psi) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} - \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}, \\ \beta \sin(\varphi + \psi) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} + \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}. \end{cases}$$

Setzt man in diesen wieder $\varphi = 0$ und $\psi = \sigma$, so erhält man

$$-\alpha \cdot \sin\sigma = 1 - \sqrt{1 - k^2\sin^2\sigma},$$
$$\beta \cdot \sin\sigma = 1 + \sqrt{1 - k^2\sin^2\sigma};$$

also, wenn man das Zeichen Δ in der gewöhnlichen Bedeutung wieder einführt,

$$\alpha = \frac{\Delta\sigma - 1}{\sin\sigma}, \quad \beta = \frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}, \quad \gamma = \frac{2\cos\sigma}{\sin\sigma}.$$

Diese Werthe nun in (22) substituirt, geben dieser Gleichung die Gestalt

$$-\frac{\Delta\sigma - 1}{\sin\sigma}\cos(\varphi - \psi) + \frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}\cos(\varphi + \psi) = \frac{2\cos\sigma}{\sin\sigma},$$

oder

$$\cos(\varphi - \psi) + \cos(\varphi + \psi) - [\cos(\varphi - \psi) - \cos(\varphi + \psi)]\,\Delta\sigma = 2\cos\sigma,$$

also

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\sigma.$$

Dieses ist die erwähnte *Lagrange*'sche Formel, die die Beziehung zwischen den Grössen φ, ψ und σ enthält. Das Additionstheorem für die elliptischen Integrale der ersten Gattung lässt sich in dieser Form so aussprechen:

„Wenn

$$(24)\quad F(\varphi) + F(\psi) = F(\sigma)$$

ist, so ist auch

$$(25)\quad \cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\sigma$$

und umgekehrt."

In einer einzigen für sich allein selbständig dastehenden Formel ausgedrückt aber erhält man das Additionstheorem, wenn man zu den elliptischen Functionen übergeht. Denn setzt man $F(\varphi) = u$, $F(\psi) = v$, so wird $F(\sigma) = u + v$, und da alsdann ferner $\varphi = am\,u$, $\psi = am\,v$, $\sigma = am\,(u + v)$ ist, so giebt die gefundene Gleichung zwischen φ, ψ und σ folgende Beziehung zwischen $am\,(u + v)$, $am\,u$ und $am\,v$

$$(26)\quad \begin{cases} \cos am\,(u + v) = \cos am\,u\cos am\,v \\ \quad - \sin am\,u\sin am\,v\,\Delta\,am\,(u + v). \end{cases}$$

Digitized by Google

Ganz in derselben Weise, wie die Beziehung zwischen φ, ψ und σ gefunden wurde, könnte man auch, wenn man

$$F(\varphi) - F(\psi) = F(\theta)$$

setzt, die entsprechende Beziehung zwischen φ, ψ und θ finden. Sie ergiebt sich aber auch unmittelbar aus der vorigen. Da nämlich $-F(\psi) = F(-\psi)$ ist, so kann man $F(\theta)$ auch als die Summe zweier Integrale darstellen, nämlich

$$F(\varphi) + F(-\psi) = F(\theta),$$

und erhält daher, wenn man $-\psi$ an die Stelle von ψ, und θ an die Stelle von σ setzt,

$$\cos\theta = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\theta,$$

und da

$$F(\theta) = u - v, \text{ also } \theta = am\,(u-v) \text{ ist,}$$

$$\cos am\,(u-v) = \cos am\,u\cos am\,v + \sin am\,u\sin am\,v\,\Delta am\,(u-v),$$

welche Gleichung sich auch aus (26) ergiebt, wenn man $-v$ an die Stelle von v setzt.

§ 29.

Aus den in dem vorigen § gewonnenen Resultaten lassen sich nun leicht die Fundamentalformeln für die elliptischen Functionen, nämlich die Ausdrücke für $\sin am\,(u \pm v)$, $\cos am\,(u \pm v)$, $\Delta am\,(u \pm v)$, durch u und v allein ableiten. Um die Rechnung dabei möglichst abzukürzen und namentlich irrationale Ausdrücke zu vermeiden, stelle man folgende Betrachtung an: Aus der Gleichung (24) kann man durch Umstellung zwei andere Gleichungen finden, nämlich aus

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\sigma)$$

folgt $F(\psi) - F(\sigma) = -F(\varphi)$

und $F(\sigma) - F(\varphi) = F(\psi)$,

welche Gleichungen sich auch schreiben lassen

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\sigma),$$
$$F(\psi) + F(-\sigma) = F(-\varphi),$$
$$F(\sigma) + F(-\varphi) = F(\psi).$$

Da nun das Integral zur Rechten jedesmal die Summe der beiden Integrale zur Linken ist, so wird man auch aus

Digitized by Google

(25) zwei neue Gleichungen erhalten, wenn man an die Stelle von

$$\varphi, \quad \psi, \quad \sigma$$

einmal $\psi, \ -\sigma, \ -\varphi$

und dann $\sigma, \ -\varphi, \quad \psi$

setzt. Dadurch erhält man die drei Gleichungen

$$(27) \cdots \begin{cases} \cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\sigma, \\ \cos\varphi = \cos\psi\cos\sigma + \sin\psi\sin\sigma\,\Delta\varphi, \\ \cos\psi = \cos\sigma\cos\varphi + \sin\sigma\sin\varphi\,\Delta\psi, \end{cases}$$

welche zwar alle drei dasselbe besagen, mit Hülfe derer man aber $\sin\sigma$, $\cos\sigma$, $\Delta\sigma$ durch φ und ψ ausdrücken kann. Aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich

$$(28) \cdot\cdot \sin\sigma = \frac{\cos^2\psi - \cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi - \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}$$

$$= \frac{(\sin^2\varphi - \sin^2\psi)\,(\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi)}{\sin^2\varphi\cos^2\psi\,\Delta^2\psi - \sin^2\psi\cos^2\varphi\,\Delta^2\varphi}.$$

Der Nenner dieses Ausdrucks ist aber

$= \sin^2\varphi\cos^2\psi\,(1 - k^2\sin^2\psi) - \sin^2\psi\cos^2\varphi\,(1 - k^2\sin^2\varphi)$

$= \sin^2\varphi\cos^2\psi - \sin^2\psi\cos^2\varphi - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi\,(\cos^2\psi - \cos^2\varphi)$

$= (\sin^2\varphi - \sin^2\psi)\,(1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi).$

Mithin wird

$$(29) \cdots \sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Ferner ergiebt sich aus den nämlichen Gleichungen

$$\cos\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\psi - \sin\psi\cos\psi\,\Delta\varphi}{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi - \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}$$

$$= \frac{(\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\psi - \sin\psi\cos\psi\,\Delta\varphi)\,(\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi)}{(\sin^2\varphi - \sin^2\psi)\,(1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks schreibt sich:

$= \sin^2\varphi\cos\varphi\cos\psi\,(1 - k^2\sin^2\psi)$

$\quad - \sin^2\psi\cos\varphi\cos\psi\,(1 - k^2\sin^2\varphi)$

$\quad - \sin\varphi\sin\psi\,(\cos^2\psi - \cos^2\varphi)\,\Delta\varphi\,\Delta\psi$

$= (\sin^2\varphi - \sin^2\psi)\,(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi).$

Also ist

$$(30) \cdots \cos\sigma = \frac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Endlich liefert die erste der Gleichungen (27)

$$\sin\varphi\sin\psi\,\Delta\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \cos\sigma.$$

Digitized by Google

Substituirt man darin den eben gefundenen Ausdruck für $\cos\sigma$, so wird

$$\sin\varphi\sin\psi\,\Delta\sigma = \frac{-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

mithin

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta\varphi\,\Delta\psi - k^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}. \quad \cdots \quad (31)$$

Setzt man nun in den Formeln (29), (30) und (31)

$$\varphi = am\,u, \quad \psi = am\,v, \quad \sigma = am\,(u+v),$$

so erhält man die Fundamentalformeln für die elliptischen Functionen, wenn man zugleich auch $-v$ an Stelle von v setzt,

$$\left.\begin{aligned}
\sin am(u\pm v) &= \frac{\sin am\,u\cos am\,v\,\Delta am\,v \pm \sin am\,v\cos am\,u\,\Delta am\,u}{1-k^2\sin^2 am\,u\sin^2 am\,v}\\
\cos am(u\pm v) &= \frac{\cos am\,u\cos am\,v \mp \sin am\,u\sin am\,v\,\Delta am\,u\,\Delta am\,v}{1-k^2\sin^2 am\,u\sin^2 am\,v}\\
\Delta am(u\pm v) &= \frac{\Delta am\,u\,\Delta am\,v \mp k^2\sin am\,u\cos am\,u\sin am\,v\cos am\,v}{1-k^2\sin^2 am\,u\sin^2 am\,v}
\end{aligned}\right\} (32)$$

Diese Relationen sind den trigonometrischen Formeln

$$\sin(u\pm v) = \sin u\cos v \pm \sin v\cos u$$
$$\cos(u\pm v) = \cos u\cos v \mp \sin u\sin v$$

analog, und, wie es sein muss, entstehen die letzteren unmittelbar aus jenen, wenn man $k=0$ setzt, weil dann die Amplituden in ihre Argumente übergehen, und die Functionen Δ sämmtlich den Werth Eins erhalten.

§ 30.

Die im vorigen § unter (32) aufgestellten Fundamentalformeln bilden die Quelle für eine Menge analytischer Beziehungen zwischen den elliptischen Functionen, gerade wie auch die trigonometrischen Formeln sich aus den Ausdrücken für $\sin(u\pm v)$ und $\cos(u\pm v)$ ergeben.

Wir stellen die wichtigsten derselben im Folgenden zusammen, indem wir den in den Fundamenten*) angegebenen nur wenige hinzufügen. Zur Abkürzung sei $am\,u = a$, $am\,v = b$, $am\,(u+v) = \sigma$, $am\,(u-v) = \vartheta$ gesetzt.

*) *Jacobi*, Fundamenta nova etc. § 18.

Digitized by Google

1) $\sin am\, 2u = \frac{2 \sin a \cos a\, \Delta a}{1 - k^2 \sin^4 a}$,

2) $\cos am\, 2u = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a\, \Delta^2 a}{1 - k^2 \sin^4 a}$,

3) $\Delta am\, 2u = \frac{\Delta^2 a - k^2 \sin^2 a \cos^2 a}{1 - k^2 \sin^4 a}$,

4) $\sin\sigma + \sin\theta = \frac{2 \sin a \cos b\, \Delta b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

5) $\sin\sigma - \sin\theta = \frac{2 \sin b \cos a\, \Delta a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

6) $\cos\sigma + \cos\theta = \frac{2 \cos a \cos b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

7) $\cos\sigma - \cos\theta = -\frac{2 \sin a \sin b\, \Delta a\, \Delta b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

8) $\Delta\sigma + \Delta\theta = \frac{2\, \Delta a\, \Delta b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

9) $\Delta\sigma - \Delta\theta = -\frac{2 k^2 \sin a \sin b \cos a \cos b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

10) $\sin\sigma \sin\theta = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

11) $\cos\sigma \cos\theta = \frac{\cos^2 a - \sin^2 b\, \Delta^2 a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

12) $\Delta\sigma\, \Delta\theta = \frac{\Delta^2 a - k^2 \cos^2 a \sin^2 b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

13) $1 + \sin\sigma \sin\theta = \frac{\cos^2 b + \sin^2 a\, \Delta^2 b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

14) $1 - \sin\sigma \sin\theta = \frac{\cos^2 a + \sin^2 b\, \Delta^2 a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

15) $1 + k^2 \sin\sigma \sin\theta = \frac{\Delta^2 b + k^2 \sin^2 a \cos^2 b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

16) $1 - k^2 \sin\sigma \sin\theta = \frac{\Delta^2 a + k^2 \sin^2 b \cos^2 a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

17) $1 + \cos\sigma \cos\theta = \frac{\cos^2 a + \cos^2 b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

18) $1 - \cos\sigma \cos\theta = \frac{\sin^2 a\, \Delta^2 b + \sin^2 b\, \Delta^2 a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

19) $1 + \Delta\sigma\, \Delta\theta = \frac{\Delta^2 a + \Delta^2 b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

20) $1 - \Delta\sigma\, \Delta\theta = \frac{k^2 (\sin^2 a \cos^2 b + \sin^2 b \cos^2 a)}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

21) $(1 \pm \sin\sigma)\,(1 \pm \sin\theta) = \frac{(\cos b \pm \sin a\, \Delta b)^2}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

Digitized by Google

22) $(1 \pm \sin\sigma)\,(1 \mp \sin\theta) = \frac{(\cos a \pm \sin b\, \Delta a)^2}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

23) $(1 \pm k\sin\sigma)(1 \pm k\sin\theta) = \frac{(\Delta b \pm k \sin a \cos b)^2}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

24) $(1 \pm k\sin\sigma)(1 \mp k\sin\theta) = \frac{(\Delta a \pm k \sin b \cos a)^2}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

25) $(1 \pm \cos\sigma)\,(1 \pm \cos\theta) = \frac{(\cos a \pm \cos b)^2}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

26) $(1 \pm \cos\sigma)(1 \mp \cos\theta) = \frac{(\sin a\, \Delta b \mp \sin b\, \Delta a)^2}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

27) $(1 \pm \Delta\sigma)\,(1 \pm \Delta\theta) = \frac{(\Delta a \pm \Delta b)^2}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

28) $(1 \pm \Delta\sigma)\,(1 \mp \Delta\theta) = \frac{k^2 \sin^2 (a \mp b)}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

29) $\sin\sigma \cos\theta = \frac{\sin a \cos a\, \Delta b + \sin b \cos b\, \Delta a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

30) $\cos\sigma \sin\theta = \frac{\sin a \cos a\, \Delta b - \sin b \cos b\, \Delta a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

31) $\sin\sigma\, \Delta\theta = \frac{\cos b \sin a\, \Delta a + \cos a \sin b\, \Delta b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

32) $\Delta\sigma \sin\theta = \frac{\cos b \sin a\, \Delta a - \cos a \sin b\, \Delta b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

33) $\cos\sigma\, \Delta\theta = \frac{\cos a \cos b\, \Delta a\, \Delta b - k'^2 \sin a \sin b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

34) $\Delta\sigma \cos\theta = \frac{\cos a \cos b\, \Delta a\, \Delta b + k'^2 \sin a \sin b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

35) $\sin(\sigma + \theta) = \frac{2 \sin a \cos a\, \Delta b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

36) $\sin(\sigma - \theta) = \frac{2 \sin b \cos b\, \Delta a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

37) $\cos(\sigma + \theta) = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a\, \Delta^2 b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$,

38) $\cos(\sigma - \theta) = \frac{\cos^2 b - \sin^2 b\, \Delta^2 a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$.

Zur Erläuterung der Ableitung dieser Formeln mögen folgende Bemerkungen dienen. Im Allgemeinen werden sie auf dieselbe Weise gebildet, wie die trigonometrischen. Bei den Umformungen wiederholen sich bisweilen die schon in § 29 zur Ableitung der Formeln (29), (30) und (31) ausgeführten Operationen, auch kann man sich dazu der Gleichungen (27) desselben § bisweilen mit Nutzen bedienen.

Digitized by Google

Die Formeln 21) bis 28) entstehen leicht aus den vorhergehenden, wenn man nur bemerkt, dass z. B,

$$(1 \pm \sin\sigma)(1 \pm \sin\theta) = 1 + \sin\sigma \sin\theta \pm (\sin\sigma + \sin\theta)$$

ist, und in 13) und 4) schon Ausdrücke für

$$1 + \sin\sigma \sin\theta \quad \text{und} \quad \sin\sigma + \sin\theta$$

gegeben sind, die man also nur durch Addition und Subtraction zu verbinden hat.

Zu diesen Mitteln, die der Ableitung der trigonometrischen wie der elliptischen Formeln gemeinsam sind, kommt aber noch eines, welches den elliptischen Functionen eigenthümlich ist, nämlich die Substitution der Argumente $u + K$, $u + iK'$ etc. an die Stelle von u. Um die Anwendbarkeit dieses Verfahrens an einem Beispiele zu zeigen, wollen wir die Formeln 11) und 12) aus 10) ableiten.

Zu diesem Ende setzen wir in der Formel 10), nämlich in

$$\sin\sigma \sin\theta = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b},$$

$u + K$ an die Stelle von u und bedienen uns der Formel (17) § 10, nämlich

$$\sin am\,(z + K) = \frac{\cos am\, z}{\Delta am\, z};$$

dann haben wir folgende Substitutionen zu machen:

$$\begin{aligned}
u &\text{ geht über in } u + K,\\
v &\quad - \quad - \quad - \quad v,\\
u + v &\quad - \quad - \quad - \quad u + v + K,\\
u - v &\quad - \quad - \quad - \quad u - v + K,\\
\sin\sigma &\quad - \quad - \quad - \quad \frac{\cos\sigma}{\Delta\sigma},\\
\sin\theta &\quad - \quad - \quad - \quad \frac{\cos\theta}{\Delta\theta},\\
\sin a &\quad - \quad - \quad - \quad \frac{\cos a}{\Delta a},\\
\sin b &\quad - \quad - \quad - \quad \sin b.
\end{aligned}$$

Setzt man alles dieses ein, so erhält man

$$(33) \qquad \frac{\cos\sigma \cos\theta}{\Delta\sigma\, \Delta\theta} = \frac{\frac{\cos^2 a}{\Delta^2 a} - \sin^2 b}{1 - k^2 \frac{\cos^2 a}{\Delta^2 a} \sin^2 b} = \frac{\cos^2 a - \sin^2 b\, \Delta^2 a}{\Delta^2 a - k^2 \sin^2 b \cos^2 a}.$$

Um nun die Producte $\cos\sigma \cos\theta$ und $\Delta\sigma\, \Delta\theta$ selbst zu finden, kann man sich des § 10 angeführten Satzes bedienen, dass

Digitized by Google

die Functionen sin., cos. und Δ Nenner haben müssen, die bis auf einen constanten Factor einander gleich sind. Da nun $\sin\sigma \sin\theta$ den Nenner $1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b$ hat, und man sich leicht überzeugen kann, dass Zähler und Nenner des vorigen Ausdrucks diese Grösse nicht schon als Factor enthalten, so kann man, wenn γ eine constante Grösse bezeichnet, setzen:

$$\cos\sigma \cos\theta = \frac{\cos^2 a - \sin^2 b\, \Delta^2 a}{\gamma\,(1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b)};\quad \Delta\sigma\, \Delta\theta = \frac{\Delta^2 a - k^2 \sin^2 b \cos^2 a}{\gamma\,(1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b)}.$$

Um γ zu bestimmen, braucht man nur specielle Werthe für u und v einzusetzen und findet, wenn man $u = v = 0$ setzt, dass $\gamma = 1$ ist, wodurch man die Formeln 11) und 12) erhält.

Man kann aber auch eine Formel für $\Delta\sigma\, \Delta\theta$ direct aus 10) ableiten, wenn man $iu + K$ statt u und iv statt v setzt und sich der Formeln [§ 10 (18), § 8 (12)]

$$\sin am\,(iz + K) = \frac{1}{\Delta\, am\,(z, k')};\quad \sin am\, iz = i \operatorname{tg} am\,(z, k')$$

bedient. Dann hat man, wenn man der Kürze wegen $am\,(u, k')$ mit (a, k') und in ähnlicher Weise die übrigen Amplituden mit dem complementären Modul bezeichnet, folgende Substitutionen zu machen:

u	geht	über	in	$iu + K$,
v	-	-	-	iv,
$u + v$	-	-	-	$i\,(u + v) + K$,
$u - v$	-	-	-	$i\,(u - v) + K$,
$\sin\sigma$	-	-	-	$\frac{1}{\Delta\,(\sigma, k')}$,
$\sin\theta$	-	-	-	$\frac{1}{\Delta\,(\theta, k')}$,
$\sin a$	-	-	-	$\frac{1}{\Delta\,(a, k')}$,
$\sin^2 b$	-	-	-	$-\operatorname{tg}^2\,(b, k')$.

Da alsdann sämmtliche Amplituden das Complement des Moduls enthalten, so kann man wieder k statt k' setzen, muss dann aber auch k' statt des explicite vorkommenden k schreiben. Alsdann erhält man

$$\frac{1}{\Delta\sigma\, \Delta\theta} = \frac{\frac{1}{\Delta^2 a} + \operatorname{tg}^2 b}{1 + k'^2 \frac{\operatorname{tg}^2 b}{\Delta^2 a}} = \frac{\cos^2 b + \sin^2 b\, \Delta^2 a}{\cos^2 b\, \Delta^2 a + k'^2 \sin^2 b}$$

Digitized by Google

oder

$$\Delta\sigma\,\Delta\theta = \frac{\Delta^2 a - \Delta^2 a \sin^2 b + k'^2 \sin^2 b}{1 - \sin^2 b + \sin^2 b\,(1 - k^2 \sin^2 a)}$$
$$= \frac{\Delta^2 a - k^2 \sin^2 b \cos^2 a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}.$$

Hat man so $\Delta\sigma\,\Delta\theta$ gefunden, so ergiebt sich aus (33) auch $\cos\sigma\cos\theta$.

Dieselbe Methode kann man auch bei der Ableitung der Formeln (29) bis (34) anwenden.

Siebenter Abschnitt.

Ueber den Zusammenhang der elliptischen Functionen mit der sphärischen Trigonometrie.

§ 31.

Stellen wir die Resultate des § 28 noch einmal kurz zusammen, so hat sich ergeben, dass von den Gleichungen

(1) $F(a) + F(b) = F(\sigma)$, $\cos\sigma = \cos a\cos b - \sin a \sin b\,\Delta\sigma$

jede die vollständige Integralgleichung der Differentialgleichung

$$\frac{da}{\Delta a} + \frac{db}{\Delta b} = 0$$

mit der willkürlichen Constante σ ist, und ebenso von den Gleichungen

(2) $F(a) - F(b) = F(\theta)$, $\cos\theta = \cos a\cos b + \sin a \sin b\,\Delta\theta$

jede die vollständige Integralgleichung der Differentialgleichung

$$\frac{da}{\Delta a} - \frac{db}{\Delta b} = 0.$$

Nun bemerkte *Lagrange**), dass die Formel (2) die grösste Aehnlichkeit mit der Grundformel der sphärischen Trigonometrie besitzt. Bezeichnen nämlich a, b, c die Seiten, und A, B, C die diesen resp. gegenüberliegenden Winkel eines sphärischen Dreiecks, so ist

(3) $\cos c = \cos a\cos b + \sin a \sin b \cos C$.

*) Théorie des fonctions. § 81. 82.

Digitized by Google

Setzt man nun

$$c = \theta,$$

so kommt diese Formel mit (2) bis auf das an die Stelle von $\cos C$ getretene $\Delta\theta$ vollkommen überein. Allein im sphärischen Dreieck haben die Verhältnisse

$$\frac{\sin A}{\sin a}, \quad \frac{\sin B}{\sin b}, \quad \frac{\sin C}{\sin c},$$

alle drei denselben Werth. Bezeichnet man diesen Werth mit k, so ist

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = k,$$

also

$$\sin A = k \sin a, \quad \sin B = k \sin b, \quad \sin C = k \sin c,$$

und dann

$$\cos A = \pm \Delta a, \quad \cos B = \pm \Delta b, \quad \cos C = \pm \Delta c,$$

wo das obere oder untere Zeichen zu wählen ist, je nachdem die betreffenden Winkel spitz oder stumpf sind. Nimmt man also den Winkel C spitz an und setzt $c = \theta$, so wird $\cos C = \Delta\theta$, und dadurch werden die Formeln (3) und (2) ganz identisch. Nimmt man dagegen C stumpf an und setzt $c = \sigma$, so wird $\cos C = -\Delta\sigma$, und dann geht die Formel (3) in (1) über. Da nun, wenn wie früher $a = am\, u$, $b = am\, v$ gesetzt wird,

$$\theta = am\,(u - v), \quad \sigma = am\,(u + v),$$

so folgt, dass wenn $am\, u$ und $am\, v$ als die Seiten eines sphärischen Dreiecks angesehen werden, die dritte Seite desselben Dreiecks gleich $am\,(u - v)$ oder $am\,(u + v)$ ist, je nachdem die beiden ersten Seiten einen spitzen oder einen stumpfen Winkel einschliessen. Der Modul der Amplitude ist alsdann das constante Verhältniss zwischen den Sinus der Winkel und den Sinus der gegenüberliegenden Seiten, nämlich

$$k = \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

Untersuchen wir nun, wie das sphärische Dreieck beschaffen sein muss, damit der Modul kleiner als 1 ausfalle. Da in diesem Falle

$$\sin B < \sin b$$

sein muss, so hat man das Dreieck so anzunehmen, dass wenn

Digitized by Google

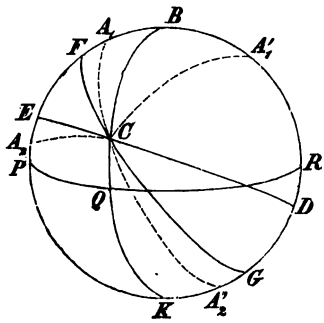
1) $B < 90^0$ ist, $b > B$,

und wenn 2) $B > 90^0$ ist, $b < B$ und $> 180^0 - B$

sei.

Betrachten wir zuerst den Fall, dass $B < 90^0$. Es sei PBQ (Fig. 5) der Winkel B, und C der auf dem Schenkel BQ liegende zweite Eckpunkt des Dreiecks. Macht man $BP = BQ = 90^0$, so ist $PQ = B$, und dies zugleich das grösste unter allen Perpendikeln, die man von irgend einem Punkte des einen Schenkels des Winkels B auf den anderen fällen kann. Legt man nun durch den Punkt C zwei grösste Kreise, den einen CE senkrecht auf BQ, den anderen CF senkrecht auf BP, so ist jedes dieser beiden Perpendikel kleiner als PQ und damit kleiner als B, also

Fig. 5.



$$CE < B, \quad CF < B.$$

Hieraus folgt: wenn die dem Winkel B gegenüberliegende Seite b des sphärischen Dreiecks grösser als B sein soll, so darf der dritte Eckpunkt A nicht zwischen E und F fallen, sondern muss eine der beiden durch A_1 und A_2 bezeichneten Lagen haben, nämlich entweder zwischen F und B oder zwischen E und K liegen. In beiden Fällen aber besitzt das sphärische Dreieck A_1BC oder A_2BC ausser dem spitzen Winkel B einen spitzen und einen stumpfen Winkel, nämlich entweder ist A_1 stumpf und C spitz, oder A_2 spitz und C stumpf.

Betrachten wir ferner den zweiten Fall, dass $B > 90^0$, und sei alsdann QBR dieser Winkel. In diesem Falle ist wieder $QR = B$, wenn $BQ = BR = 90^0$ gemacht wird; jetzt aber ist QR das kleinste unter allen Perpendikeln, die man von irgend einem Punkte des einen Schenkels des Winkels B auf den anderen fällen kann. Zieht man daher CD senkrecht auf BQ und CG senkrecht auf BR, so ist

$$CG > B \text{ und } CD > B.$$

Digitized by Google

Da nun jetzt $b < B$ sein muss*), so darf der dritte Eckpunkt A des Dreiecks nicht zwischen D und G fallen, sondern muss eine der beiden durch A_1' und A_2' bezeichneten Lagen haben, nämlich entweder zwischen B und D oder zwischen G und K liegen. In dem ersten Falle sind die Winkel C und A_1' beide spitz, das Dreieck $A_1'BC$ hat dann die Beschaffenheit der früheren Dreiecke A_1BC und A_2BC, es besitzt nämlich einen stumpfen und zwei spitze Winkel. Im zweiten Falle sind dagegen beide Winkel C und A_2' stumpf, sodass das Dreieck dann drei stumpfe Winkel hat.

Aus diesen Betrachtungen geht nun hervor, dass der Modul des sphärischen Dreiecks nur dann kleiner als 1 ist, wenn das Dreieck entweder einen oder drei stumpfe Winkel hat.

Es sei hiebei bemerkt, dass, wenn man das dem Dreieck ABC zugehörige Supplementardreieck mit $A'B'C'$ und dessen Seiten mit a', b', c' bezeichnet, sodass

$$a' = 180^0 - A, \quad A' = 180^0 - a,$$

und folglich

$$\frac{\sin A'}{\sin a'} = \frac{\sin a}{\sin A}$$

ist, der Modul des Supplementardreiecks gerade dann kleiner als 1 ist, wenn der des ursprünglichen Dreiecks grösser als 1 ist, und umgekehrt.

Kehren wir nun zu unserer früheren Betrachtung zurück, und nehmen wir an, es seien $am\,u$, $am\,v$ und k, letzteres als ein echter Bruch, gegeben.

Setzt man

$$am\,u = a, \quad am\,v = b,$$

so kennt man zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks. Da ausserdem

$$\sin A = k \sin a, \quad \sin B = k \sin b$$

ist, so kennt man auch die Sinus ihrer gegenüberliegenden Winkel, kann aber die Winkel selbst noch beliebig als spitz oder als stumpf annehmen. Wir wollen annehmen, B sei ein spitzer Winkel, dann muss nach den eben erhaltenen

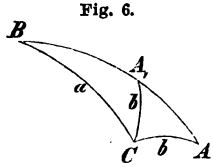
*) Die Forderung, dass b die Grenze $180^0 - B$ nicht überschreiten darf, ändert nichts an der Betrachtung.

Digitized by Google

Resultaten einer der beiden Winkel, entweder A oder C stumpf sein. Ist nun $am\, u < am\, v$, also $a < b$, so ist nur der letztere Fall möglich, ist aber $a > b$ gegeben, so kann man beide Fälle annehmen und erhält dadurch eine Bestätigung des bekannten Satzes, dass man aus zwei Seiten und einem Winkel, der der kleineren Seite gegenüber liegt, zwei sphärische Dreiecke construiren kann, die die gegebenen Stücke besitzen.

Bildet man diese beiden Dreiecke (Fig. 6), indem man auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels B, $BC = a = am\, u$ und dann $CA = CA_1 = b = am\, v$ macht, so folgt aus dem Früheren, weil nun der Winkel A_1CB spitz, der Winkel ACB aber stumpf ist, und beide sich zu 180^0 ergänzen, dass $A_1B = \vartheta = am\,(u - v)$ und $AB = \sigma = am\,(u + v)$ sein muss. Hierin ist nun ein einfaches Mittel enthalten, die Amplitude der Summe und Differenz geometrisch zu construiren.

Fig. 6.



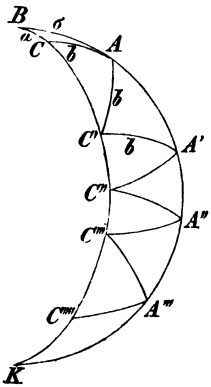
§ 32.

Man kann das Resultat des vorigen Paragraph auch in folgender Weise aussprechen und dann noch einige Folgerungen ziehen. Besteht zwischen den Amplituden a, b und σ die Gleichung

(4) . . . . . $F(a) + F(b) = F(\sigma)$,

so lassen sich a, b und σ als die Seiten eines sphärischen Dreiecks ansehen, bei welchem der zwischen a und b eingeschlossene Winkel stumpf ist. (Fig. 7.)

Fig. 7.



Nimmt man nun eine vierte Amplitude σ' so an, dass

(5) . . $F(b) + F(\sigma) = F(\sigma')$

ist, so sind auch b, σ, σ' die Seiten eines sphärischen Dreiecks, welches die Seiten b und σ mit dem vorigen gemeinsam hat und zwischen diesen Seiten einen stumpfen Winkel besitzt; man wird also dieses Dreieck erhalten, wenn man $AC' = b$ macht,

Digitized by Google

und dann wird $BC' = \sigma'$ sein. Addirt man aber die beiden Gleichungen (5) und (4), so folgt

$$F(a) + 2F(b) = F(\sigma'),$$

und da nun $F(a) = u$ und $F(b) = v$ ist, so folgt

$$BC' = \sigma' = am\,(u + 2v).$$

Setzt man ferner

$$F(b) + F(\sigma') = F(\sigma''),$$

so ist

$$\sigma'' = BA',$$

wenn man wieder $C'A' = b$ macht, und man erhält ebenso wie vorhin

$$BA' = \sigma'' = am\,(u + 3v).$$

Fährt man in dieser Weise fort, indem man

$$A'C'' = C''A'' = A''C'' \cdots = b$$

macht, so erhält man, wenn

$$BC = am\,u, \quad CA = am\,v$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} BA &= am\,(u + v),\\ BC' &= am\,(u + 2v),\\ BA' &= am\,(u + 3v),\\ BC'' &= am\,(u + 4v),\\ BA'' &= am\,(u + 5v),\end{aligned}$$

u. s. w.

Macht man nun endlich $u = v$, also auch $a = b$ und

$$BC = CA = am\,u,$$

so ist

$$BA = am\,2u,\ BC' = am\,3u,\ BA' = am\,4u,\ BC'' = am\,5u,$$
$$BA'' = am\,6u,\ \text{u. s. w.}$$

§ 33.

Aus den vorstehenden Betrachtungen ist ersichtlich, dass zwischen den elliptischen Functionen und der sphärischen Trigonometrie ein inniger Zusammenhang besteht. Man wird daher die Formeln der einen Disciplin aus denen der anderen herleiten können. Um dies an einigen Beispielen zu zeigen, wollen wir die Gaussischen Formeln der sphärischen Trigonometrie aus unseren Formeln für die elliptischen Functionen

Digitized by Google

und zweitens das Additionstheorem der elliptischem Functionen aus der sphärischen Trigonometrie ableiten.

Zu den Gaussischen Formeln werden uns die Formeln 25) bis 28) des § 30 führen. Um das doppelte Zeichen bequem beibehalten zu können und dadurch zu gleicher Zeit zwei der Gaussischen Formeln zu erhalten, wollen wir mit ε eine Grösse bezeichnen, die nur einen der beiden Werthe $+1$ oder -1 haben soll, so dass stets

$$\varepsilon^2 = +1$$

ist. Dann lassen sich die Formeln 27) und 28) so schreiben:

$$(1 + \varepsilon \Delta\sigma)(1 + \varepsilon \Delta\theta) = \frac{(\Delta a + \varepsilon \Delta b)^2}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b},$$

$$(1 + \varepsilon \Delta\sigma)(1 - \varepsilon \Delta\theta) = \frac{k^2 \sin^2 (a - \varepsilon b)}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}.$$

Daraus folgt durch Division:

$$\frac{1 + \varepsilon \Delta\theta}{1 - \varepsilon \Delta\theta} = \frac{(1 + \varepsilon \Delta\theta)^2}{k^2 \sin^2 \theta} = \frac{(\Delta a + \varepsilon \Delta b)^2}{k^2 \sin^2 (a - \varepsilon b)}.$$

Ebenso ergiebt sich aus 25) und 26) durch Division

$$\frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{1 - \varepsilon \cos \theta} = \frac{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = \frac{(\cos a + \varepsilon \cos b)^2}{(\sin a \Delta b - \varepsilon \sin b \Delta a)^2},$$

mithin, wenn man die beiden letzten Formeln dividirt und die Wurzel auszieht:

$$(6) \quad \frac{1 + \varepsilon \Delta\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \frac{(\Delta a + \varepsilon \Delta b)(\sin a \Delta b - \varepsilon \sin b \Delta a)}{\sin (a - \varepsilon b)(\cos a + \varepsilon \cos b)}.$$

Ueber das der Wurzel zu ertheilende Zeichen ist zu bemerken, dass die eben aufgestellte Formel richtig ist, wenn sich ergeben wird, dass der rechte und linke Theil dieser Gleichung beide gleiches Zeichen haben. Sollte sich dagegen herausstellen, dass der eine Theil das entgegengesetzte Zeichen des andern hat, so müsste man einem von beiden noch ein Minuszeichen vorsetzen. Führt man nun die im rechten Theile angedeuteten Multiplicationen aus, indem man bemerkt, dass

$$\cos \varepsilon b = \cos b, \quad \sin \varepsilon b = \varepsilon \sin b,$$

also

$$\sin (a - \varepsilon b) = \sin a \cos b - \varepsilon \sin b \cos a$$

ist, so erhält man

$$\frac{1 + \varepsilon \Delta\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \frac{\Delta a \Delta b \sin a - \Delta a \Delta b \sin b + \varepsilon \sin a \Delta^2 b - \varepsilon \sin b \Delta^2 a}{\cos a \cos b \sin a - \cos a \cos b \sin b - \varepsilon \sin b \cos^2 a + \varepsilon \sin a \cos^2 b},$$

Digitized by Google

Löst man nun $\Delta^2 a$, $\Delta^2 b$, $\cos^2 a$, $\cos^2 b$ auf, so dass

$$\frac{1+\varepsilon\Delta\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} = \frac{\Delta a\,\Delta b(\sin a-\sin b)+\varepsilon\sin a(1-k^2\sin^2 b)-\varepsilon\sin b(1-k^2\sin^2 a)}{\cos a\cos b(\sin a-\sin b)-\varepsilon\sin b(1-\sin^2 a)+\varepsilon\sin a(1-\sin^2 b)}$$

wird, so sieht man, dass sich der Bruch durch $\sin a - \sin b$ heben lässt, wodurch man erhält

$$\frac{1+\varepsilon\Delta\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} = \frac{\Delta a\,\Delta b+\varepsilon+\varepsilon k^2\sin a\sin b}{\cos a\cos b+\varepsilon+\varepsilon\sin a\sin b},$$

oder

$$\frac{1+\varepsilon\Delta\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} = \frac{1+\varepsilon\,\Delta a\,\Delta b+k^2\sin a\sin b}{1+\varepsilon\cos a\cos b+\sin a\sin b}.$$

Diese Formel kann man nun leicht in eine der sphärischen Trigonometrie umwandeln; denn setzt man

$$\theta = c,$$

$$\sin A = k\sin a,\quad \sin B = k\sin b,\quad \sin C = k\sin\theta,$$

so ist, weil $\theta = am\,(u-v)$ ist, C ein spitzer Winkel, folglich

$$\Delta\theta = \cos C.$$

Dann aber muss einer der beiden Winkel A und B spitz, und der andere stumpf sein, man muss daher

$$\cos A\cos B = -\Delta a\,\Delta b$$

setzen und erhält dann

$$\frac{1+\varepsilon\cos C}{1+\varepsilon\cos c} = \frac{1-\varepsilon\cos A\cos B+\sin A\sin B}{1+\varepsilon\cos a\cos b+\sin a\sin b}$$
$$= \frac{1-\varepsilon(\cos A\cos B-\varepsilon\sin A\sin B)}{1+\varepsilon(\cos a\cos b+\varepsilon\sin a\sin b)}$$
$$= \frac{1-\varepsilon\cos(A+\varepsilon B)}{1+\varepsilon\cos(a-\varepsilon b)}.$$

Da diese Formel zeigt, dass beide Theile der Gleichung positiv sind, so ergiebt sich, dass wir früher bei der Wurzelausziehung das richtige Zeichen gewählt haben. Vorstehende Gleichung enthält nun wirklich zwei der Gaussischen Formeln; denn setzt man $\varepsilon = +1$, so verwandelt sie sich in

$$\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)},$$

und für $\varepsilon = -1$ in

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.$$

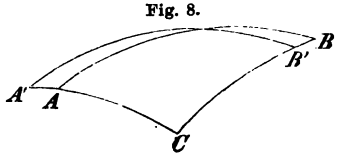
Die beiden anderen Gaussischen Formeln wird man auf ähnliche Art erhalten, wenn man statt der Gleichung (6) die

Digitized by Google

entsprechende für $\frac{1+\varepsilon\,\Delta\theta}{1-\varepsilon\cos\theta}$ herstellt, indem man den Ausdruck $\frac{1+\varepsilon\cos\theta}{1-\varepsilon\cos\theta}$ in $\frac{\sin^2\theta}{(1-\varepsilon\cos\theta)^2}$ umformt.

Um zweitens das Additionstheorem der elliptischen Functionen aus der sphärischen Trigonometrie herzuleiten, betrachten wir in einem sphärischen Dreiecke eine Seite c und den ihr gegenüberliegenden Winkel C als constant, während die übrigen Stücke sich verändern mögen. (Fig. 8.) Wir denken uns also etwa, dass sich die Seite AB zwischen den Schenkeln des unveränderlichen Winkels C so bewege, dass wenn sie in die Lage $A'B'$ übergangen ist, $A'B' = AB$ sei. Alsdann ist auch der Modul des sphärischen Dreiecks

Fig. 8.



$$k = \frac{\sin C}{\sin c}$$

eine constante Grösse. Den Winkel C nehmen wir, um die Formel für die Addition zu erhalten, stumpf an, dann sind A und B entweder beide spitz oder beide stumpf, mithin $\cos A$ und $\cos B$ von gleichem Zeichen. Unter diesen Voraussetzungen nun differentiiren wir die Grundformel der sphärischen Trigonometrie

(7) $\cdot\ \cdot\quad \cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C$

vollständig nach a und b und erhalten

$$0 = (-\sin a\cos b + \cos a\sin b\cos C)\,da + (-\cos a\sin b + \sin a\cos b\cos C)\,db.$$

Nun ist aber

$$\sin a\cos b - \cos a\sin b\cos C = \sin c\cos B$$
$$\cos a\sin b - \sin a\cos b\cos C = \sin c\cos A,$$

folglich

$$0 = -\sin c\cos B\,da - \sin c\cos A\,db,$$

und da entweder $\cos B = \Delta b$ und $\cos A = \Delta a$, oder $\cos B = -\Delta b$ und $\cos A = -\Delta a$ ist,

$$0 = \Delta b\,da + \Delta a\,db$$

oder

(8) $\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\quad \frac{da}{\Delta a} + \frac{db}{\Delta b} = 0.$

Digitized by Google

Wenn also zwischen den Variablen a und b die endliche Gleichung (7) besteht, so besteht zwischen ihnen auch die Differentialgleichung (8), jene ist also eine Integralgleichung dieser. Letztere enthält die Constante k, die endliche Gleichung (7) dagegen die Constanten c und C; da aber vermöge der Gleichung

$$\sin C = k \sin c$$

C eine Function von k und c ist, so enthält die Gleichung (7) eine Constante mehr als die Differentialgleichung (8) und ist demnach die vollständige Integralgleichung von letzterer.

Achter Abschnitt.

Das Additionstheorem der zweiten und dritten Gattung.

§ 34.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Summe zweier elliptischen Integrale der zweiten Gattung zu finden, wenn zwischen ihren Amplituden die in den vorigen §§ behandelte Relation stattfindet.

Es seien also φ, ψ und σ drei solche Amplituden, dass zwischen ihnen folgende Gleichungen bestehen

$$\left.\begin{aligned} &F(\varphi) + F(\psi) = F(\sigma) \\ &\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\sigma \\ &\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\psi}{\Delta\psi} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

von welchen die beiden ersten vollständige Integralgleichungen der letzteren mit der willkürlichen Constante σ sind; es entsteht dann die Aufgabe, die Summe U der Integrale

$$E_1(\varphi) + E_1(\psi) = U \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

zu finden. Hier ist U ein Integral von einer Function von φ und ψ, da aber vermöge der vorhergehenden Gleichungen (1) ψ eine Function von φ und der willkürlichen Constante σ ist, so ist U ein Integral von einer einzigen Variablen, eine Quadratur; U ist daher ein integrabler Ausdruck, und es fragt

Digitized by Google

sich nur, ob das Integral auf einen algebraischen Ausdruck, einen Logarithmus oder Kreisbogen führt, oder ob es höherer Natur ist. Es wird sich zeigen, dass das erstere der Fall ist.

Der Weg, ψ als Function von φ in U wirklich einzuführen, würde ein sehr weitläufiger sein; wir kommen kürzer zum Ziele, wenn wir U als Function der beiden Variablen φ und ψ behandeln und dU als ein vollständiges Differential herzustellen suchen, was nach den eben angestellten Betrachtungen gelingen muss.

Da nach der im § 18 aufgestellten Definition der Function E_1

$$E_1(\varphi) = \int_0^{\varphi} \Delta\varphi \, d\varphi$$

ist, so erhält man durch vollständige Differentiation der Gleichung (2) nach φ und ψ

$$dU = \Delta\varphi \, d\varphi + \Delta\psi \, d\psi;$$

addirt man dazu die aus der letzten der Gleichungen (1) folgende Gleichung

$$0 = \Delta\psi \, d\varphi + \Delta\varphi \, d\psi;$$

so erhält man den sogleich integralen Ausdruck

$$dU = (\Delta\varphi + \Delta\psi)(d\varphi + d\psi).$$

Setzt man nämlich, wie im § 28 (S. 108),

$$\varphi + \psi = p,$$

und benutzt die daselbst unter (23) abgeleitete Formel

$$\Delta\varphi + \Delta\psi = \beta \sin p,$$

wo β, durch σ ausgedrückt, den Werth

$$\beta = \frac{1 + \Delta\sigma}{\sin\sigma}$$

hat, so erhält man

$$dU = \beta \sin p \, dp,$$

und dann durch Integration sofort

$$U = -\beta \cos p + C = -\frac{1 + \Delta\sigma}{\sin\sigma} \cos(\varphi + \psi) + C,$$

wo C die Integrationsconstante bedeutet. Es handelt sich jetzt nur noch darum, die letztere zu bestimmen, d. h. durch σ auszudrücken, und die Gleichung auf ihre einfachste Gestalt zu bringen.

Digitized by Google

Setzen wir zu diesem Zwecke in die nun gewonnene Gleichung

$$E_1(\varphi) + E_1(\psi) = -\frac{1+\Delta\sigma}{\sin\sigma}\cos(\varphi+\psi) + C$$

die beiden zusammengehörigen Werthe $\varphi = 0$ und $\psi = \sigma$ ein, so erhalten wir, da $E_1(0) = 0$ ist,

$$C = E_1(\sigma) + \frac{1+\Delta\sigma}{\sin\sigma}\cos\sigma,$$

und dadurch

$$E_1(\varphi) + E_1(\psi) - E_1(\sigma) = \frac{1+\Delta\sigma}{\sin\sigma}[\cos\sigma - \cos(\varphi+\psi)]$$

$$= \frac{1+\Delta\sigma}{\sin\sigma}(\cos\sigma - \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi).$$

Wegen der Gleichungen (1) ist aber

$$\cos\sigma - \cos\varphi\cos\psi = -\sin\varphi\sin\psi\,\Delta\sigma;$$

folglich erhält man

$$E_1(\varphi) + E_1(\psi) - E_1(\sigma) = \frac{1-\Delta^2\sigma}{\sin\sigma}\sin\varphi\sin\psi \quad \cdots \quad (3)$$

$$= k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma.$$

In dieser Gleichung besteht das Additionstheorem für die zweite Gattung; man könnte darin noch $\sin\sigma$ nach (29) § 29 durch φ und ψ ausdrücken, wodurch der Ausdruck rechts von φ und ψ allein abhängig wird. Es ist zu bemerken, dass diese Gleichung wieder nur in Verbindung mit den Gleichungen (1) einen Sinn hat, indem sie nur dann gilt, wenn die Amplituden φ, ψ, σ jenen Gleichungen genügen. Sie wird aber zu einer selbständig dastehenden Gleichung, wenn man die elliptischen Functionen einführt. Denn setzt man wie früher

$$\varphi = am\,u,\ \psi = am\,v,\ \text{so ist}\ \sigma = am(u+v),$$

$$E_1(\varphi) = E(u),\ E_1(\psi) = E(v),\ E_1(\sigma) = E(u+v),$$

also

$$E(u+v) = E(u) + E(v) - k^2\sin am\,u\sin am\,v\sin am(u+v).$$

Damit ist die Function E von der Summe $(u+v)$ durch die Functionen der einzelnen Argumente und durch einfache elliptische Functionen ausgedrückt. Für den speciellen Fall, dass $v = K$ ist, erhält man hieraus, da

$$E(K) = E \quad \text{und} \quad \sin am\,K = 1$$

ist,

Digitized by Google

$$E(u+K) = E(u) + E - k^2 \sin am\, u \sin am\,(u+K),$$

oder nach (17) § 10

$$E(u+K) = E(u) + E - k^2 \sin am\, u \frac{\cos am\, u}{\Delta am\, u}.$$

§ 35.

In ähnlicher Weise, wie eben unter Zugrundelegung der Gleichungen (1) die Summe zweier Integrale zweiter Gattung gefunden worden ist, kann man auch die Summe zweier Integrale dritter Gattung finden. Setzt man nämlich unter Anwendung der *Legendre*'schen Form (vgl. § 21)

$$\Pi_1(\varphi, n) + \Pi_1(\psi, n) = U,$$

so ist, weil ψ eine Function von φ ist, U ein Integral von φ allein, also muss sich dU, durch φ und ψ ausgedrückt, in einen integrablen Ausdruck umformen lassen. Man hat (§ 21)*)

$$dU = \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi} + \frac{d\psi}{(1+n\sin^2\psi)\Delta\psi};$$

aber wegen (1) ist

$$(4) \quad \frac{d\psi}{\Delta\psi} = -\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

folglich

$$(5) \quad dU = \frac{n(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)}{1+n(\sin^2\varphi+\sin^2\psi)+n^2\sin^2\varphi\sin^2\psi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Nun folgt aus der Gleichung (3) durch Differentiation, weil σ als constant zu betrachten ist,

$$\Delta\varphi\, d\varphi + \Delta\psi\, d\psi = k^2 \sin\sigma\, d(\sin\varphi\sin\psi),$$

oder mit nochmaliger Benutzung der Gleichung (4)

$$k^2 \sin\sigma\, d(\sin\varphi\sin\psi) = \frac{\Delta^2\varphi - \Delta^2\psi}{\Delta\varphi} d\varphi$$
$$= k^2(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Dies nun in (5) substituirt giebt

$$dU = \frac{n\sin\sigma\, d(\sin\varphi\sin\psi)}{1+n(\sin^2\varphi+\sin^2\psi)+n^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

oder wenn man

$$\sin^2\varphi + \sin^2\psi = p,\ \sin\varphi\sin\psi = q$$

setzt,

*) *Legendre*, Exercices du calcul intégral. I. p. 75, und Traité des fontions elliptiques. I. p. 74.

Digitized by Google

$$dU = \frac{n \sin \sigma \, dq}{1 + np + n^2 q^2},$$

und es bleibt jetzt nur noch übrig, p durch q auszudrücken. Dies geschieht vermittelst der zweiten der Gleichungen (1), denn aus derselben folgt

$$\begin{aligned}(\cos \sigma + q \Delta \sigma)^2 &= \cos^2 \varphi \cos^2 \psi = (1 - \sin^2 \varphi)(1 - \sin^2 \psi) \\ &= 1 - p + q^2,\end{aligned}$$

folglich erhält man

$$\begin{aligned}p &= 1 + q^2 - (\cos \sigma + q \Delta \sigma)^2 \\ &= \sin^2 \sigma - 2 \cos \sigma \, \Delta \sigma \, q + k^2 \sin^2 \sigma \, q^2,\end{aligned}$$

und dann

$$dU = \frac{n \sin \sigma \, dq}{1 + n \sin^2 \sigma - 2 n \cos \sigma \, \Delta \sigma \, q + n (n + k^2 \sin^2 \sigma) q^2},$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$\left.\begin{aligned}n \sin \sigma &= M, \qquad n \cos \sigma \, \Delta \sigma = B, \\ 1 + n \sin^2 \sigma &= A, \; n (n + k^2 \sin^2 \sigma) = n (n + 1 - \Delta^2 \sigma) = C\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

setzt,

$$dU = \frac{M \, dq}{A - 2 B q + C q^2}.$$

Hiedurch ist nun dU als ein Differential von einer einzigen Variablen q dargestellt, und man erhält alsdann

$$\Pi_1 (\varphi, n) + \Pi_1 (\psi, n) = \int dU + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constanten hat man die Bedingung zu benutzen, dass für $\varphi = 0$, $\psi = \sigma$, also $q = 0$ werde; dann ist

$$\Pi_1 (\sigma, n) = \int_0 dU + \text{Const.},$$

folglich

$$\Pi_1 (\varphi, n) + \Pi_1 (\psi, n) - \Pi_1 (\sigma, n) = \int_0^q dU.$$

Nun schreibt sich

$$dU = \frac{CM \, dq}{AC - B^2 + (Cq - B)^2} = \frac{CM}{AC - B^2} \cdot \frac{dq}{1 + \left(\frac{Cq - B}{\sqrt{AC - B^2}}\right)^2},$$

demnach erhält man durch unbestimmte Integration

$$\frac{M}{\sqrt{AC - B^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{Cq - B}{\sqrt{AC - B^2}},$$

und dann, wenn man der Kürze wegen $\int_0^q dU = U_1$ setzt,

$$U_1 = \frac{M}{\sqrt{AC - B^2}} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{Cq - B}{\sqrt{AC - B^2}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{B}{\sqrt{AC - B^2}}\right].$$

Digitized by Google

und wenn man endlich die beiden Arcus Tangens nach der Formel

$$\text{arc tg } x + \text{arc tg } y = \text{arc tg } \frac{x+y}{1-xy}$$

vereinigt,

$$U_1 = \frac{M}{\sqrt{AC - B^2}} \text{arc tg } \frac{q\sqrt{AC-B^2}}{A - Bq}.$$

Substituirt man nun hierin die Werthe von M, A, B, C aus (6), so erhält man zunächst

$$\begin{aligned} AC - B^2 &= n\,(1 + n - \Delta^2\sigma)\,(1 + n\sin^2\sigma) - n^2\cos^2\sigma\,\Delta^2\sigma \\ &= n\,[1 + n - \Delta^2\sigma + n\,(1+n)\sin^2\sigma - n\,\Delta^2\sigma] \\ &= n\,(1+n)\,(1 - \Delta^2\sigma + n\sin^2\sigma) \\ &= n\,(1+n)\,(k^2+n)\sin^2\sigma, \end{aligned}$$

also wenn man der Kürze wegen

$$\frac{(1+n)\,(k^2+n)}{n} = \omega$$

setzt,

$$\sqrt{AC - B^2} = n\sqrt{\omega}\sin\sigma,$$

und daher

$$\Pi_1(\varphi, n) + \Pi_1(\psi, n) - \Pi_1(\sigma, n) = U_1$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\omega}} \text{arc tg } \frac{n\sqrt{\omega}\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma}{1 + n\sin^2\sigma - n\sin\varphi\sin\psi\cos\sigma\,\Delta\sigma}.$$

Für den Fall, dass der Parameter n negativ und numerisch kleiner als k^2 ist, auf welchen Fall, wie § 21 erwähnt ist, sich die *Jacobi*'sche Normalform der dritten Gattung bezieht, wird der vorige Ausdruck von imaginärer Form und verwandelt sich in einen Logarithmus. Setzt man für diesen Fall

$$n = -k^2\sin^2\alpha,$$

so wird

$$\sqrt{\omega} = \sqrt{\frac{(1+n)\,(k^2+n)}{n}} = i\,\frac{\cos\alpha\,\Delta\alpha}{\sin\alpha};$$

demnach erhält man

$$U_1 = \frac{\text{tg }\alpha}{i\,\Delta\alpha} \text{arc tg } \frac{-ik^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma}{1 - k^2\sin^2\sigma\sin^2\alpha + k^2\sin^2\alpha\sin\varphi\sin\psi\cos\sigma\,\Delta\sigma},$$

und wenn man die Formel

$$\frac{1}{i} \text{arc tg } iz = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$$

anwendet,

Digitized by Google

$$U_1 = \tfrac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\Delta \alpha} \log H,$$

und

$$H = \frac{1 - k^2 \sin^2\sigma \sin^2\alpha - k^2 \sin\alpha \sin\varphi \sin\psi (\sin\sigma \cos\alpha \Delta\alpha - \sin\alpha \cos\sigma \Delta\sigma)}{1 - k^2 \sin^2\sigma \sin^2\alpha + k^2 \sin\alpha \sin\varphi \sin\psi (\sin\sigma \cos\alpha \Delta\alpha + \sin\alpha \cos\sigma \Delta\sigma)}$$

$$= \frac{1 - k^2 \sin\alpha \sin\varphi \sin\psi \frac{\sin\sigma \cos\alpha \Delta\alpha - \sin\alpha \cos\sigma \Delta\sigma}{1 - k^2 \sin^2\sigma \sin^2\alpha}}{1 + k^2 \sin\alpha \sin\varphi \sin\psi \frac{\sin\sigma \cos\alpha \Delta\alpha + \sin\alpha \cos\sigma \Delta\sigma}{1 - k^2 \sin^2\sigma \sin^2\alpha}}.$$

Dieser Ausdruck kann nun auch unmittelbar in elliptischen Functionen ausgedrückt werden. Nach S. 78 hat man nämlich, wenn

$$\varphi = am\, u, \quad n = -k^2 \sin^2\alpha = -k^2 \sin^2 am\, a$$

gesetzt wird,

$$\Pi_1(\varphi, n) = u + \frac{\operatorname{tg} am\, a}{\Delta\, am\, a} \Pi(u, a).$$

Nun ist aber, wenn ausserdem $\psi = \sin am\, v$ gesetzt wird, $\sigma = am(u + v)$, man erhält also sofort

$$\Pi(u, a) + \Pi(v, a) - \Pi(u + v, a) = \tfrac{1}{2} \log H.$$

In dem Ausdrucke für H aber wird den Formeln (32) S. 113 gemäss

$$\frac{\sin\sigma \cos\alpha \Delta\alpha \mp \sin\alpha \cos\sigma \Delta\sigma}{1 - k^2 \sin^2\sigma \sin^2\alpha} = \sin am(u + v \mp a),$$

und daher

$$H = \frac{1 - k^2 \sin am\, a \sin am\, u \sin am\, v \sin am(u + v - a)}{1 + k^2 \sin am\, a \sin am\, u \sin am\, v \sin am(u + v + a)}.$$

Neunter Abschnitt.

Das Abel'sche Theorem.

§ 36.

Die in den vorigen Abschnitten gewonnenen Ergebnisse können wir jetzt dahin zusammenfassen, dass die elliptischen Integrale folgende wichtige Eigenschaft besitzen: Besteht zwischen den trigonometrischen Functionen von φ, ψ und σ die algebraische Relation

$$\cos\sigma = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \Delta\sigma,$$

Digitized by Google

so ist zu gleicher Zeit

$$F(\varphi) + F(\psi) - F(\sigma) = 0,$$
$$E_1(\varphi) + E_1(\psi) - E_1(\sigma) = k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\sigma,$$
$$\Pi_1(\varphi, n) + \Pi_1(\psi, n) - \Pi_1(\sigma, n) = U_1,$$

wo U_1 den im vorigen § abgeleiteten logarithmischen oder cyclometrischen Ausdruck bedeutet.

Eine ähnliche Eigenschaft kommt nun auch einer Classe viel allgemeinerer Integrale zu, nämlich allen Integralen von der Form

$$\int f(x, y)\, dx,$$

in welcher f eine rationale Function bedeutet, y aber eine algebraische Function von x im allgemeinsten Sinne, d. h. die Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind. Indem *Abel* dieses nach ihm benannte Theorem entdeckte, brach er die Bahn zur Untersuchung von Transcendenten, von denen man vor ihm nicht den geringsten Satz anzugeben vermochte.

Abel hat diesem Gegenstande zwei Abhandlungen gewidmet*). In der ersten erörtert er seinen Satz in ausführlicher Weise, bezieht ihn jedoch noch nicht auf jene allgemeinste Classe algebraischer Integrale, sondern nur auf solche, die eine Quadratwurzel aus einer ganzen Function beliebigen Grades enthalten; in der zweiten dagegen wird ein sehr kurzer Beweis des Theorems in seiner allgemeinsten Form gegeben. In neuester Zeit haben *Clebsch* und *Gordan***) das Abel'sche Theorem mit Hinzuziehung einiger Betrachtungen aus der Lehre von den algebraischen Curven auf's Neue bewiesen, und dieser Beweis zeichnet sich besonders dadurch aus, dass trotz grosser Allgemeinheit der zu Grunde liegenden Formen das Resultat vollständig und in überraschend einfacher Gestalt hergestellt ist. In dieser wichtigen Schrift wird ausserdem vielfach auf das Abel'sche Theorem und zwar gerade auf die dabei vorkommenden Einzelheiten Bezug ge-

*) Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes. Crelle's Journ. Bd. 3.
Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes. Crelle's Journ. Bd. 4.

**) *Clebsch* und *Gordan*, Theorie der Abel'schen Functionen. Leipzig 1866.

Digitized by Google

nommen. Dies gab Veranlassung, hier auf das Theorem in seiner ursprünglichen Gestalt wieder zurückzukommen, und da es hier viel weniger darauf ankam, den Satz in seiner ganzen Allgemeinheit zu beweisen, als vielmehr darauf, die Details der Untersuchung hervortreten zu lassen und die Verbindung mit den elliptischen Integralen festzuhalten, so ist im Folgenden die erste der genannten Abhandlungen *Abel*'s zu Grunde gelegt.

Abel schlug in gewisser Beziehung einen ähnlichen Weg ein, wie *Euler*, indem er auch von einer algebraischen Gleichung ausging. Diese setzte er aus vier ganzen Functionen $\vartheta_1 z$, $\vartheta_2 z$, $\varphi_1 z$, $\varphi_2 z$ zusammen. Es sei

$$\begin{aligned} \vartheta_1 z &\text{ vom Grade } m_1, \\ \vartheta_2 z &\text{ - - } m_2, \\ \varphi_1 z &\text{ - - } \nu_1, \\ \varphi_2 z &\text{ - - } \nu_2, \end{aligned}$$

und zwar

$$\begin{aligned} \vartheta_1 z &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{m_1} z^{m_1}, \\ \vartheta_2 z &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_{m_2} z^{m_2}. \end{aligned}$$

Bildet man dann die ebenfalls ganze Function

$$Fz = (\vartheta_1 z)^2 \varphi_1 z - (\vartheta_2 z)^2 \varphi_2 z,$$

so ist $Fz = 0$ die Gleichung, von welcher *Abel* ausgegangen ist.

Die Function F sei vom Grade μ; bezeichnet man mit $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ ihre vorläufig alle als ungleich vorausgesetzten Wurzeln und mit A den Coefficienten der höchsten Potenz von z, so ist

$$(\vartheta_1 z)^2 \varphi_1 z - (\vartheta_2 z)^2 \varphi_2 z = A (z - x_1)(z - x_2) \cdots (z - x_\mu). \quad (1)$$

In dieser Gleichung hat der Buchstabe z keine besondere Bedeutung, sondern ist nur der Träger des Functionszeichens, die allgemeine Bezeichnung für das Argument der Function, an dessen Stelle nach und nach verschiedene Grössen gesetzt werden sollen. Die Variablen dieser Gleichung aber sollen rechter Hand die Grössen $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ und linker Hand die Coefficienten der Functionen ϑ, also die Grössen $a_0, a_1, \cdots a_{m_1}, b_0, b_1, \cdots b_{m_2}$ sein. Die Coefficienten der Functionen φ hingegen sollen als constant betrachtet werden.

Digitized by Google

Setzt man in (1) an die Stelle von z irgend eine der Grössen $x_1, x_2, \cdots x_\mu$, die mit x ohne Index bezeichnet werden möge, so verschwindet der Ausdruck F. Man hat also

(2) $\cdots Fx = (\vartheta_1 x)^2 \varphi_1 x - (\vartheta_2 x)^2 \varphi_2 x = 0.$

Diese Gleichung repräsentirt μ verschiedene Gleichungen, welche entstehen, wenn man an die Stelle von x nach und nach $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ setzt, und vermöge derselben kann man sich die letzteren Grössen als Functionen der Coefficienten a_0, a_1, etc., b_0, b_1, etc. denken. Aus dem Umstande aber, dass die Anzahl μ dieser Gleichungen von der Anzahl der Coefficienten a_0, a_1, etc., b_0, b_1, etc. verschieden sein kann, hat *Abel* den grössten Nutzen gezogen.

Wir differentiiren nun die Gleichung (2), und zwar vollständig, sowohl nach x, als auch nach den Coefficienten der ϑ, und bezeichnen, um die Differentiation nach den letzteren Variablen auszuzeichnen, diese mit dem Zeichen δ. Bezeichnet ferner, wie gewöhnlich, $F'x$ den Differentialquotienten von Fx in Beziehung auf x allein, so erhält man durch die vollständige Differentiation der Gleichung (2)

(3) $\cdots F'x \cdot dx + \delta Fx = 0,$

und es ist

(4) $\cdots \delta Fx = 2 \cdot \vartheta_1 x \cdot \varphi_1 x \cdot \delta \vartheta_1 x - 2 \vartheta_2 x \cdot \varphi_2 x \cdot \delta \vartheta_2 x.$

Aus der Gleichung (2) folgt durch Wurzelausziehung, wenn man das doppelte Zeichen der Quadratwurzel mit ε andeutet, welche Grösse daher nur einen der Werthe $+1$ oder -1 haben soll,

(5) $\cdots \vartheta_1 x \cdot \sqrt{\varphi_1 x} = \varepsilon \cdot \vartheta_2 x \cdot \sqrt{\varphi_2 x}.$

In Beziehung auf ε ist diese Gleichung von zweifacher Natur. Soll sie nämlich dazu dienen, eine andere unbekannte Grösse zu bestimmen, so kann man dem ε beide Werthe zuertheilen, und wird dann zu zwei verschiedenen Sätzen oder Relationen geführt. Sind dagegen alle in dieser Gleichung ausser ε vorkommenden Grössen schon bekannt, so dient dieselbe dazu, den Werth von ε, der dann nicht mehr beliebig ist, zu bestimmen, nämlich so, dass beide Seiten der Gleichung das gleiche Zeichen erhalten.

Digitized by Google

Mittelst der Gleichung (5) kann man dem Ausdruck (4) eine andere Gestalt geben. Bezeichnet man nämlich das Product der Functionen $\varphi_1 x$ und $\varphi_2 x$ mit φx, so dass

$$\varphi_1 x \cdot \varphi_2 x = \varphi x$$

so erhält man aus (5)

$$\vartheta_1 x \cdot \varphi_1 x = \varepsilon \cdot \vartheta_2 x \sqrt{\varphi x} \text{ und } \vartheta_2 x \cdot \varphi_2 x = \varepsilon \cdot \vartheta_1 x \sqrt{\varphi x},$$

und wenn man dies in (4) substituirt,

$$\delta F x = 2\,\varepsilon \cdot (\vartheta_2 x \cdot \delta\,\vartheta_1 x - \vartheta_1 x \cdot \delta\,\vartheta_2 x) \sqrt{\varphi x},$$

wodurch die Gleichung (3) in folgende übergeht:

$$F' x \cdot dx = 2\,\varepsilon \cdot (\vartheta_1 x \cdot \delta\,\vartheta_2 x - \vartheta_2 x \cdot \delta\,\vartheta_1 x) \sqrt{\varphi x},$$

aus welcher, da $\varepsilon^2 = +1$ ist,

$$\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{\varphi x}} = \frac{2\,(\vartheta_1 x \cdot \delta\,\vartheta_2 x - \vartheta_2 x \cdot \delta\,\vartheta_1 x)}{F' x}$$

folgt.

Hiedurch ist linker Hand ein Differentialausdruck hergestellt, der die Quadratwurzel aus einer ganzen Function φx beliebigen Grades enthält, und in dem speciellen Falle, dass diese vom vierten oder dritten Grade ist, integrirt das elliptische Integral der ersten Gattung liefert. Man kann aber diesen Differentialausdruck verallgemeinern und ihm eine solche Gestalt geben, dass er zu gleicher Zeit alle drei Gattungen der elliptischen Integrale als specielle Fälle in sich schliesst. Man hat dazu die vorige Gleichung nur mit

$$\frac{fx}{x - \alpha}$$

zu multipliciren, worin fx eine ganze Function von x, und α eine beliebige von x unabhängige Grösse bedeutet. Man erhält alsdann

$$\varepsilon \frac{fx \cdot dx}{(x - \alpha)\sqrt{\varphi x}} = \frac{2\,fx\,(\vartheta_1 x \cdot \delta\,\vartheta_2 x - \vartheta_2 x \cdot \delta\,\vartheta_1 x)}{(x - \alpha)\,F' x},$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$2\,fx\,(\vartheta_1 x \cdot \delta\,\vartheta_2 x - \vartheta_2 x \cdot \delta\,\vartheta_1 x) = \lambda x$$

setzt,

$$\varepsilon \frac{fx \cdot dx}{(x - \alpha)\sqrt{\varphi x}} = \frac{\lambda x}{(x - \alpha)\,F' x}.$$

In welcher Weise der Ausdruck links auf die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung führt, soll sogleich

Digitized by Google

näher erörtert werden. In Beziehung auf die Function λx sei aber bemerkt, dass sie eine doppelte Natur besitzt: in Beziehung auf x ist sie eine ganze Function; in Beziehung auf die Coefficienten a_0, a_1, etc., b_0, b_1, etc. dagegen ist λx ein Differentialausdruck, der nur die Differentiale dieser Grössen, nicht aber dx enthält.

Die vorige Gleichung gilt, welche der Variabeln $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ man auch an die Stelle von x setzen mag. Setzt man diese nun nach und nach für x ein, addirt alle diese Gleichungen und deutet die ausgeführte Summation durch ein vorgesetztes Σ an, so erhält man

$$\Sigma \varepsilon \frac{fx\,dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \Sigma \frac{\lambda x}{(x-\alpha)F'x}.$$

Wir bezeichnen die rechte Seite dieser Gleichung der eben gemachten Bemerkung zufolge kurz mit δV, so dass

$$\Sigma \frac{\lambda x}{(x-\alpha)F'x} = \delta V$$

sei. Löst man ausserdem auf der linken Seite die Summe auf, giebt den Grössen ε, deren Werth, wie erwähnt, von den Grössen x abhängt, dieselben Indices, wie den letzteren, und integrirt, so schreibt sich die vorige Gleichung

$$(6)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 \int \frac{fx_1\,dx_1}{(x_1-\alpha)\sqrt{\varphi x_1}} + \varepsilon_2 \int \frac{fx_2\,dx_2}{(x_2-\alpha)\sqrt{\varphi x_2}} + \cdots\cdots \\ \qquad \cdots\cdots + \varepsilon_\mu \int \frac{fx_\mu\,dx_\mu}{(x_\mu-\alpha)\sqrt{\varphi x_\mu}} = \int \delta V + \text{Const.} \end{cases}$$

Um nun zunächst anzugeben, in welcher Weise diese Integrale die elliptischen Integrale der drei Gattungen umfassen, wollen wir ein specielles Beispiel betrachten, das zugleich dazu dienen möge, die allgemeinen Betrachtungen zu erläutern. Dazu bedienen wir uns derjenigen Normalform, welche schon § 22 benutzt worden ist, nämlich der Form

$$u = \tfrac{1}{2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}},$$

nach welcher

$$x = \sin^2 am\, u$$

ist. Um diese zu erhalten, sei

$$\vartheta_1 x = a_0 + a_1 x,$$
$$\vartheta_2 x = b_0,$$

Digitized by Google

$$\varphi_1 x = x,$$
$$\varphi_2 x = (1 - x)(1 - k^2 x).$$

Dann wird

$$\varphi x = x(1 - x)(1 - k^2 x),$$

und die Gleichung (1) geht über in

$$(a_0 + a_1 z)^2 z - b_0^2 (1 - z)(1 - k^2 z) = a_1^2 (z - x_1)(z - x_2)(z - x_3),$$

oder, wenn man durch a_1^2 dividirt und dann

$$\frac{a_0}{a_1} = a, \quad \frac{b_0}{a_1} = b,$$

mithin auch

$$\vartheta_1 x = a + x, \quad \vartheta_2 x = b$$

setzt, in

$$Fz = (a + z)^2 z - b^2 (1 - z)(1 - k^2 z) = (z - x_1)(z - x_2)(z - x_3).$$

Es sind daher hier a und b die Variablen, auf welche sich die mit dem Zeichen δ bezeichnete Differentiation bezieht.

Dies vorausgesetzt, gehen die Integrale in dem Ausdrucke (6) in elliptische Integrale der ersten Gattung über, wenn man

$$fx = \tfrac{1}{2}(x - \alpha)$$

annimmt.

Zur Bildung der zweiten Gattung hat man

$$\Delta^2 am\, u = 1 - k^2 x, \quad du = \tfrac{1}{2} \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)(1 - k^2 x)}};$$

damit ist

$$E(u) = \int_0^u \Delta^2 am\, u\, du = \tfrac{1}{2} \int_0^x \frac{(1 - k^2 x)\, dx}{\sqrt{x(1 - x)(1 - k^2 x)}}.$$

Man erhält daher in (6) elliptische Integrale der zweiten Gattung, wenn

$$fx = \tfrac{1}{2}(x - \alpha)(1 - k^2 x)$$

gesetzt wird.

Endlich ist

$$\Pi(u, a) = \int_0^u \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a\, \Delta am\, a \cdot \sin^2 am\, u \cdot du}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u}.$$

Drückt man dies wieder durch x aus und setzt zur Abkürzung

$$am\, a = \delta,$$

Digitized by Google

so wird

$$\Pi(u, a) = \tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{k^2 \sin\delta \cos\delta \,\Delta\delta \,.\, x \,.\, dx}{(1 - k^2 \sin^2\delta \,.\, x)\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}},$$

und wenn man

$$\frac{1}{k^2 \sin^2\delta} = \alpha$$

setzt,

$$\Pi(u, a) = -\tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{\frac{\cos\delta \,\Delta\delta}{\sin\delta}\, x \,.\, dx}{(x-\alpha)\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}.$$

Mithin treten in (6) bei der Annahme

$$fx = -\tfrac{1}{2}\frac{\cos\delta \,\Delta\delta}{\sin\delta}\, x$$

elliptische Integrale der dritten Gattung auf.

§ 37.

Wir gehen nun zur näheren Untersuchung des Ausdrucks

$$\delta V = \Sigma \frac{\lambda x}{(x-\alpha)\, F'x}$$

über. Da hier λx eine ganze Function von x ist, so ist auch, wenn man

$$\frac{\lambda x - \lambda \alpha}{x - \alpha} = \lambda_1 x$$

setzt, $\lambda_1 x$ eine ganze Function von x. Wegen der identischen Gleichung

$$\lambda x = \lambda x - \lambda\alpha + \lambda\alpha$$

erhält man daher

$$\frac{\lambda x}{x-\alpha} = \lambda_1 x + \frac{\lambda\alpha}{x-\alpha}$$

und

$$\delta V = \lambda\alpha \,\Sigma \frac{1}{(x-\alpha)\, F'x} + \Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x}.$$

Hierin kann man zuerst das erste Glied von den Variablen $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ befreien, wenn man bedenkt, dass

$$F\alpha = A(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)\cdots\cdots(\alpha - x_\mu)$$

ist, und dass man also, wenn man den Bruch $\frac{1}{F\alpha}$ in Partialbrüche zerlegt, erhält:

$$(7)\quad \frac{1}{F\alpha} = \frac{1}{(\alpha - x_1)\, F'x_1} + \frac{1}{(\alpha - x_2)\, F'x_2} \cdots\cdots + \frac{1}{(\alpha - x_\mu)\, F'x_\mu}.$$

Digitized by Google

Denn die rechte Seite dieses Ausdrucks ist nichts anderes als

$$\Sigma \frac{1}{(\alpha - x) F'x},$$

und man erhält daher

$$\delta V = - \frac{\lambda \alpha}{F\alpha} + \Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x} \cdot \quad \ldots \quad (8)$$

Dadurch hat aber das erste Glied eine Form erhalten, in der nur noch die variablen Coefficienten der ϑ, nicht aber die Variablen $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ vorkommen; denn es ist

$$\left.\begin{aligned} \lambda \alpha &= 2f\alpha \,(\vartheta_1 \alpha \,.\, \delta \vartheta_2 \alpha - \vartheta_2 \alpha \,.\, \delta \vartheta_1 \alpha) \\ F\alpha &= (\vartheta_1 \alpha)^2 \, \varphi_1 \alpha - (\vartheta_2 \alpha)^2 \, \varphi_2 \alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9)$$

Das zweite Glied des Ausdrucks δV kann man mit Hülfe der Gleichung (7) als einen Entwickelungscoefficienten darstellen. Entwickelt man nämlich den Bruch $\frac{1}{z - x}$ in eine Reihe nach fallenden Potenzen von z, so erhält man

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z\left(1 - \frac{x}{z}\right)} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} \cdots\cdots + \frac{x^n}{z^{n+1}} + \cdots,$$

mithin

$$\frac{1}{(z-x) F'x} = \frac{1}{z} \frac{1}{F'x} + \frac{1}{z^2} \frac{x}{F'x} + \frac{1}{z^3} \frac{x^2}{F'x} \cdots + \frac{1}{z^{n+1}} \frac{x^n}{F'x} + \cdots$$

Setzt man darin für x nach und nach die Variablen $x_1, x_2 \cdots x_\mu$ ein, addirt alle dann entstehenden Gleichungen und wendet die Gleichung (7) an, so erhält man

$$\frac{1}{Fz} = \frac{1}{z} \Sigma \frac{1}{F'x} + \frac{1}{z^2} \Sigma \frac{x}{F'x} + \frac{1}{z^3} \Sigma \frac{x^2}{F'x} \cdots + \frac{1}{z^{n+1}} \Sigma \frac{x^n}{F'x} + \cdots, \quad (10)$$

und wenn man diese Gleichung mit z^n multiplicirt,

$$\frac{z^n}{Fz} = z^{n-1} \Sigma \frac{1}{F'x} + z^{n-2} \Sigma \frac{x}{F'x} + \cdots + \frac{1}{z} \Sigma \frac{x^n}{F'x} + \cdots$$

Dies zeigt nun, dass $\Sigma \frac{x^n}{F'x}$ der Coefficient der $(-1)^{\text{ten}}$ Potenz von z in der Entwickelung der Function $\frac{z^n}{Fz}$ nach fallenden Potenzen von z ist, was mit dem Zeichen

$$\Sigma \frac{x^n}{F'x} = \left[\frac{z^n}{Fz}\right]_{z^{-1}} \cdot \quad \ldots \quad (11)$$

bezeichnet wird. Eine ähnliche Gleichung findet nun aber

Digitized by Google

auch statt, wenn an Stelle der Potenz x^n eine ganze Function von x, z. B. $\lambda_1 x$, tritt. Denn, wie aus der Definition der Entwickelungs-Coefficienten leicht hervorgeht, gelten von diesen dieselben Sätze, wie von den Differentialquotienten in Bezug auf Addition und Subtraction, in Beziehung auf die Multiplication mit einem von der Entwickelungsgrösse z unabhängigen Factor, sowie auch in Beziehung auf Differentiation und Integration nach einer von z unabhängigen Grösse. Setzt man daher für den Augenblick

$$\lambda_1 x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

so ist

$$\Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x} = c_0 \Sigma \frac{1}{F'x} + c_1 \Sigma \frac{x}{F'x} + c_2 \Sigma \frac{x^2}{F'x} + \cdots,$$

und dann in Folge der Gleichung (11)

$$\Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x} = c_0 \left[\frac{1}{Fz}\right]_{z^{-1}} + c_1 \left[\frac{z}{Fz}\right]_{z^{-1}} + c_2 \left[\frac{z^2}{Fz}\right]_{z^{-1}} + \cdots$$

Wegen der eben erwähnten Sätze aber zieht sich dies in

$$\Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x} = \left[\frac{c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots}{Fz}\right]_{z^{-1}}$$

oder in

$$\Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x} = \left[\frac{\lambda_1 z}{Fz}\right]_{z^{-1}}$$

zusammen. Hiedurch geht die Gleichung (8) zunächst über in

$$(12) \quad \cdots \quad \delta V = -\frac{\lambda\alpha}{F\alpha} + \left[\frac{\lambda_1 z}{Fz}\right]_{z^{-1}},$$

und darin kann nun statt $\lambda_1 z$ wieder λz eingeführt werden. Es war nämlich

$$\lambda_1 z = \frac{\lambda z}{z - \alpha} - \frac{\lambda\alpha}{z - \alpha},$$

also ist

$$(13) \quad \left[\frac{\lambda_1 z}{Fz}\right]_{z^{-1}} = \left[\frac{\lambda z}{(z-\alpha)\,Fz}\right]_{z^{-1}} - \lambda\alpha \left[\frac{1}{(z-\alpha)\,Fz}\right]_{z^{-1}},$$

man kann aber zeigen, dass das zweite Glied dieses Ausdrucks verschwindet.

Entwickelt man nämlich den Bruch $\frac{1}{f_n z}$, wo

$$f_n z = A\,(z^n + Bz^{n-1} + \cdots)$$

Digitized by Google

eine beliebige ganze Function von z bedeute, nach fallenden Potenzen von z, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{f_n z} = \frac{1}{Az^n\left(1+\frac{B}{z}+\cdots\right)} = \frac{1}{Az^n}\Big[1-\Big(\frac{B}{z}+\cdots\Big)\\ +\Big(\frac{B}{z}+\cdots\Big)^2+\cdots\Big].\end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (14)$$

Die Entwickelung beginnt also erst mit der n^{ten} Potenz von $\frac{1}{z}$, die Coefficienten aller niedrigeren Potenzen sind daher Null. Damit ist schon bewiesen, dass

$$\left[\frac{1}{(z-\alpha)\,Fz}\right] z^{-1} = 0$$

ist; wir wollen indessen noch einige andere Sätze hervorheben, um diese später anwenden zu können. Vergleicht man mit dem Vorigen die in (10) ausgeführte Entwickelung der reciproken ganzen Function $\frac{1}{Fz}$, wo Fz vom μ^{ten} Grade ist, so sieht man, dass die Coefficienten der niedrigeren Potenzen von $\frac{1}{z}$ sämmtlich Null sein müssen, und der Coefficient von $\frac{1}{z^\mu}$ gleich $\frac{1}{A}$ wird, daher erhält man folgenden Satz:

Ist $$Fz = A\,(z-x_1)\,(z-x_2)\cdots(z-x_\mu)$$

eine ganze Function vom μ^{ten} Grade, und sind $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ die sämmtlich von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $Fz = 0$, so ist

$$\Sigma \frac{x^p}{F'x} = \begin{cases} 0 \text{ wenn } p < \mu - 1, \\ \frac{1}{A} \quad \text{-} \quad p = \mu - 1, \end{cases}$$

die Summe auf alle Wurzeln $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ ausgedehnt. Multiplicirt man ferner die Gleichung (14) mit einer ganzen Function $f_m z$ vom m^{ten} Grade, so beginnt auf der rechten Seite die Entwickelung mit der $(n-m)^{\text{ten}}$ Potenz von $\frac{1}{z}$; daher wird der Coefficient von $\frac{1}{z}$ noch Null sein, wenn $n - m \gtreqless 2$ ist. Man hat demnach auch den Satz:

Es ist $$\left[\frac{f_m z}{f_n z}\right] z^{-1} = 0, \text{ wenn } m \lesseqgtr n-2.$$

Digitized by Google

Endlich untersuchen wir des Folgenden wegen auch gleich noch, wann der Ausdruck

$$\left[\frac{f_m z}{\sqrt{f_n z}}\right]_{z^{-1}}$$

verschwindet. Aus der vorigen Betrachtung geht hervor, dass die Entwickelung von

$$\frac{f_m z}{\sqrt{f_n z}}$$

die erste Potenz von $\frac{1}{z}$ nicht enthalten wird, wenn die Entwickelung von

$$\frac{(f_m z)^2}{f_n z}$$

die zweite Potenz von $\frac{1}{z}$ nicht enthält, sondern erst mit $\frac{1}{z^3}$ oder höheren Potenzen von $\frac{1}{z}$ beginnt. Dieses wird aber der Fall sein, wenn

$$n - 2m \gtreqless 3;$$

also ist

$$\left[\frac{f_m z}{\sqrt{f_n z}}\right]_{z^{-1}} = 0, \text{ wenn } 2m \lesseqgtr n - 3.$$

Dem Vorstehenden gemäss verschwindet also in der That das zweite Glied der rechten Seite der Gleichung (13), und dadurch geht der Ausdruck (12) für δV in folgenden über:

$$\delta V = -\frac{\lambda\alpha}{F\alpha} + \left[\frac{\lambda z}{(z-\alpha)\,Fz}\right]_{z^{-1}}.$$

Hiedurch sind nun die Variablen $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ fortgeschafft; denn substituirt man jetzt die Ausdrücke (9) für die Functionen λ und F, so erhält man

$$(15) \quad \left\{\begin{aligned} \delta V = &-\frac{2f\alpha\,(\vartheta_1\alpha \,.\, \delta\vartheta_2\alpha - \vartheta_2\alpha \,.\, \delta\vartheta_1\alpha)}{(\vartheta_1\alpha)^2\,\varphi_1\alpha - (\vartheta_2\alpha)^2\,\varphi_2\alpha} \\ &+\left[\frac{2fz\,(\vartheta_1 z \,.\, \delta\vartheta_2 z - \vartheta_2 z \,.\, \delta\vartheta_1 z)}{(z-\alpha)\,[(\vartheta_1 z)^2\,\varphi_1 z - (\vartheta_2 z)^2\,\varphi_2 z]}\right]_{z^{-1}}. \end{aligned}\right.$$

Wir haben diese Entwickelung gemacht unter der Voraussetzung, dass die Wurzeln $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ der Gleichung $Fz = 0$ alle von einander verschieden sind. Da aber der vorstehende Ausdruck diese Grössen gar nicht mehr enthält, so bleibt die Gleichung (6), in welcher für δV der eben gefundene Aus-

Digitized by Google

druck zu setzen ist, richtig, wenn man zunächst annimmt, dass irgend zwei der Grössen $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ einander sehr nahe gleich sind; sie wird daher auch nicht zu bestehen aufhören, wenn jene vollkommen einander gleich werden. Uebrigens hat dieser Fall für uns keine Wichtigkeit, und wir werden die kleinen Modificationen, welche das Auftreten gleicher Wurzeln später nothwendig macht, übergehen.

Den Ausdruck (15) kann man nun leicht integriren; denn da die durch das Zeichen δ angedeutete Differentiation sich nur auf die in den ϑ enthaltenen Coefficienten bezieht, so sind beide zu integrirende Ausdrücke von der Form

$$A\,\frac{p\,dq - q\,dp}{p^2 m - q^2 n},$$

worin A, m und n constant sind. Betrachtet man darin $\frac{q}{p}$ als die Variable, so erhält man leicht

$$\int \frac{p\,dq - q\,dp}{p^2 m - q^2 n} = \frac{1}{2\sqrt{mn}} \log \frac{p\sqrt{m} + p\sqrt{n}}{p\sqrt{m} - p\sqrt{n}}.$$

Die Integration des Ausdrucks δV liefert daher, da für m und n resp. φ_1 und φ_2, für das Product mn also die Function φ zu setzen ist, wenn mit C die willkürliche Constante bezeichnet wird,

$$\left.\begin{aligned} V = C &- \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \log \frac{\vartheta_1\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} + \vartheta_2\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\vartheta_1\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} - \vartheta_2\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}} \\ &+ \left[\frac{fz}{(z-\alpha)\sqrt{\varphi z}} \log \frac{\vartheta_1 z\sqrt{\varphi_1 z} + \vartheta_2 z\sqrt{\varphi_2 z}}{\vartheta_1 z\sqrt{\varphi_1 z} - \vartheta_2 z\sqrt{\varphi_2 z}}\right] z^{-1} \end{aligned}\right\} \cdots (16)$$

Hiemit ist der erste Theil des Abel'schen Theorems erwiesen, der darin besteht, dass die Summe von gewissen positiv oder negativ genommenen Integralen einem logarithmischen Ausdrucke gleich ist, nämlich nach Gleichung (6):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 \int \frac{fx_1\,dx_1}{(x_1-\alpha)\sqrt{\varphi x_1}} + \varepsilon_2 \int \frac{fx_2\,dx_2}{(x_2-\alpha)\sqrt{\varphi x_2}} + \cdots \cdot \\ + \varepsilon_\mu \int \frac{fx_\mu\,dx_\mu}{(x_\mu-\alpha)\sqrt{\varphi x_\mu}} = V \end{aligned}\right\} \cdots (17)$$

Ehe wir zu dem zweiten Theile übergehen, nämlich zur näheren Untersuchung der algebraischen Beziehung, in welcher die Variabeln $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ stehen, wollen wir zunächst

Digitized by Google

zusehen, wie sich der Ausdruck V für gewisse Classen der Function fx vereinfacht.

Wenn erstlich fx eine durch $x - \alpha$ theilbare ganze Function ist, sodass, wenn man

$$fx = (x - \alpha) f_1 x$$

setzt, $f_1 x$ wieder eine ganze Function ist, so ist offenbar

$$f\alpha = 0;$$

folglich verschwindet alsdann das erste Glied des Ausdrucks V, und es bleibt ausser der Constanten C nur das Entwickelungsglied übrig. Dies ist z. B. der Fall bei den elliptischen Integralen der zweiten Gattung, denn nach S. 139 hat man für diese

$$\frac{fx}{x - \alpha} = \tfrac{1}{2}(1 - k^2 x)$$

zu setzen.

Wenn zweitens $(fx)^2$ von einem niedrigeren Grade ist als φx, so verschwindet das Entwickelungsglied. Um dies einzusehen, erinnere man sich, dass, wenn $f_m z$ und $f_n z$ zwei ganze Functionen vom resp. m^{ten} und n^{ten} Grade sind, das Entwickelungsglied

$$\left[\frac{f_m z}{\sqrt{f_n z}}\right]_{z^{-1}} = 0$$

ist, sobald $2m \gtreqless n - 3$. Daraus folgt, dass

$$\left[\frac{fz}{(z - \alpha)\sqrt{\varphi z}}\right]_{z^{-1}} = 0$$

sein wird, sobald $(fz)^2$ von niedrigerem Grade ist als φz, denn dann ist der Grad von $(fz)^2$ mindestens um 3 Einheiten kleiner als der von $(z - \alpha)^2 \varphi z$. Dieses Verhältniss wird auch noch fortbestehen, wenn man den in der Parenthese [] stehenden Ausdruck mit einer gebrochenen Function multiplicirt, deren Zähler nicht von höherem Grade ist als der Nenner. In diesem Falle wird also der Coefficient von z^{-1} ebenfalls Null sein. Um daher nachzuweisen, dass das Entwickelungsglied verschwindet, wenn $(fz)^2$ von niedrigerem Grade ist als φz, haben wir nur zu zeigen, dass die mit $\frac{fx}{(z - \alpha)\sqrt{\varphi z}}$ multiplicirte Function im Zähler nicht von höhe-

Digitized by Google

rem Grade ist, als im Nenner. Dass dies in der That so ist, sieht man am einfachsten ein, wenn man das Entwickelungsglied vor der Integration, also in der Form betrachtet, in welcher es in dem Ausdrucke (15) für δV enthalten ist. Hier nämlich kann man dasselbe schreiben:

$$\frac{2fz}{(z-\alpha)\sqrt{\varphi z}} \cdot \frac{(\vartheta_1 z \cdot \delta\vartheta_2 z - \vartheta_2 z \cdot \delta\vartheta_1 z)\sqrt{\varphi z}}{(\vartheta_1 z)^2 \varphi_1 z - (\vartheta_2 z)^2 \varphi_2 z}.$$

Nun waren die Functionen ϑ_1, ϑ_2, φ_1, φ_2 resp. von den Graden m_1, m_2, ν_1, ν_2. Der Nenner der mit

$$\frac{fz}{(z-\alpha)\sqrt{\varphi z}}$$

multiplicirten Function hat also entweder den Grad $2m_1 + \nu_1$, und dann ist $2m_2 + \nu_2 \leqq 2m_1 + \nu_1$; oder er hat den Grad $2m_2 + \nu_2$, und dann ist $2m_1 + \nu_1 \leqq 2m_2 + \nu_2$. Durch die Differentiation nach den Coefficienten der Function ϑ wird der Grad dieser Functionen entweder nicht geändert, oder wenn geändert, gewiss nicht erhöht; also sind $\delta\vartheta_1 z$ und $\delta\vartheta_2 z$ höchstens von den Graden m_1 und m_2, und der Grad des Zählers unserer zu betrachtenden Function ist höchstens $m_1 + m_2 + \frac{\nu_1+\nu_2}{2} = \frac{2m_1+\nu_1}{2} + \frac{2m_2+\nu_2}{2}$, und da nun $\frac{2m_1+\nu_1}{2} + \frac{2m_2+\nu_2}{2}$ entweder $\leqq 2m_1 + \nu_1$ oder $\leqq 2m_2 + \nu_2$ ist, so folgt, dass der Zähler höchstens denselben Grad haben kann, wie der Nenner.

Das in δV enthaltene Entwickelungsglied verschwindet also, sobald $(fz)^2$ von niedrigerem Grade ist als φz. Integrirt man nun, so erhält man eine Constante, die sich mit C verschmilzt, und es verschwindet also in diesem Falle das Entwickelungsglied auch in V nach der Integration.

Dieser Fall tritt z. B. bei den elliptischen Integralen der dritten Gattung ein. Denn bei diesen war

$$fx = -\tfrac{1}{2}\frac{\cos\delta\,\Delta\delta}{\sin\delta}\,x,$$

also vom 1ten Grade; dagegen $\varphi x = x(1-x)(1-k^2x)$ vom 3ten Grade, daher $(fx)^2$ von niedrigerem Grade als φx.

Bezeichnet im Allgemeinen n den Grad der Function fx und 2ν oder $2\nu - 1$ den Grad von φx, je nachdem derselbe gerade oder ungerade ist, so muss, wenn erstens

Digitized by Google

$$\nu_1 + \nu_2 = 2\nu$$

ist, damit das Entwickelungsglied verschwinde,

$$2n < 2\nu \text{ also } n < \nu \text{ oder } n \leqq \nu - 1,$$

sein. Ist zweitens

$$\nu_1 + \nu_2 = 2\nu - 1,$$

so muss

$2n < 2\nu - 1$ oder $n < \nu - \frac{1}{2}$, folglich ebenfalls $n \leqq \nu - 1$ sein.

Drittens können die beiden eben besprochenen Fälle zu gleicher Zeit eintreten; es kann sowohl fx theilbar durch $x - \alpha$, als auch $(fx)^2$ von niedrigerem Grade sein als φx. Alsdann verschwinden beide Glieder des Ausdrucks V, wodurch derselbe sich auf die Constante C reducirt. Dies ist bei den elliptischen Integralen der ersten Gattung der Fall, wo $fx = \frac{1}{2}(x - \alpha)$ war.

Aus der Gleichung (17) kann noch eine ähnliche abgeleitet werden, welche die nämliche Eigenschaft von allgemeineren Integralen aussagt. Man kann nämlich zunächst durch beliebig oft wiederholte Differentiation nach α Integrale erhalten, welche eine beliebige, etwa die h^{te} Potenz von $x - \alpha$ im Nenner enthalten; da sodann eine beliebige rationale Function $r(x)$ sich in Partialbrüche mit Nennern von der Form $(x - \alpha)^h$ zerlegen lässt, so gilt auch von Integralen von der Form

$$\int \frac{r(x)\,dx}{\sqrt{\varphi x}}$$

der Satz, dass eine Summe derselben einem algebraischen, logarithmischen oder cyclometrischen Ausdruck gleich sein kann. Die nähere Ausführung hievon übergehen wir.

§ 38.

Wir gehen nun zu dem zweiten Theile des Abel'schen Theorems über, nämlich zur Betrachtung der algebraischen Gleichung, welche zwischen den Variabeln $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ besteht. Wie wir gesehen haben, sind diese die Wurzeln der Gleichung

$$(\vartheta_1 z)^2 \varphi_1 z - (\vartheta_2 z)^2 \varphi_2 z = 0,$$

Digitized by Google

und folglich genügen sie den μ Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \vartheta_1 x_1 \sqrt{\varphi_1 x_1} = \varepsilon_1 \vartheta_2 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1} \\ \vartheta_1 x_2 \sqrt{\varphi_1 x_2} = \varepsilon_2 \vartheta_2 x_2 \sqrt{\varphi_2 x_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vartheta_1 x_\mu \sqrt{\varphi_1 x_\mu} = \varepsilon_\mu \vartheta_2 x_\mu \sqrt{\varphi_2 x_\mu} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Wir haben bis jetzt die unabhängigen Variablen noch unbestimmt gelassen. Nun aber nehmen wir an, dass eine gewisse Anzahl der Grössen $x_1, x_2, \cdots x_\mu$, welche Anzahl wir vorläufig mit n bezeichnen wollen, also die Grössen

$$x_1, x_2, \cdots x_n$$

die unabhängigen Variablen seien; die übrigen, nämlich

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots x_\mu,$$

sowie auch die Coefficienten der Functionen ϑ seien die abhängigen Variablen.

Alsdann kann zunächst ein Theil der Gleichungen (18) dazu dienen, die Coefficienten der Functionen ϑ durch die unabhängigen Variablen auszudrücken, wenn wir nämlich die Anzahl n der letzteren der Anzahl jener Coefficienten gleich machen. Nun war aber ϑ_1 vom m_1^{ten} Grade, sie enthält also $m_1 + 1$ Coefficienten; ϑ_2 war vom m_2^{ten} Grade und enthält $m_2 + 1$ Coefficienten. Die Anzahl aller variabeln Coefficienten ist daher $m_1 + m_2 + 2$, und wenn wir, wie es auch § 36 bei dem angeführten Beispiele geschah, die ganze Gleichung (1) durch einen dieser Coefficienten dividiren, gleich $m_1 + m_2 + 1$.

Setzt man daher nun

$$m_1 + m_2 + 1 = n,$$

so ist die Anzahl der unabhängigen Variablen der Anzahl der variabeln Coefficienten der ϑ gleich, und die letzteren können daher mittelst der Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \vartheta_1 x_1 \sqrt{\varphi_1 x_1} = \varepsilon_1 \vartheta_2 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1} \\ \vartheta_1 x_2 \sqrt{\varphi_1 x_2} = \varepsilon_2 \vartheta_2 x_2 \sqrt{\varphi_2 x_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vartheta_1 x_n \sqrt{\varphi_1 x_n} = \varepsilon_n \vartheta_2 x_n \sqrt{\varphi_2 x_n} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

durch die unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \cdots x_n$ ausgedrückt werden. Dabei ist aber zu bemerken, dass die Coefficienten der ϑ in diesen Gleichungen nur linear enthalten sind.

Digitized by Google

Daher lassen sich dieselben rational durch folgende Grössen ausdrücken

$$(20) \quad \cdots \quad \begin{cases} x_1, & x_2, & \cdots & x_n, \\ \sqrt{\varphi_1 x_1}, & \sqrt{\varphi_1 x_2}, & \cdots & \sqrt{\varphi_1 x_n}, \\ \sqrt{\varphi_2 x_1}, & \sqrt{\varphi_2 x_2}, & \cdots & \sqrt{\varphi_2 x_n}. \end{cases}$$

Wir wollen nun dieses als geschehen annehmen, und schreiben alsdann die Gleichung (1) in folgender Gestalt:

$$(21) \quad \frac{(\vartheta_1 z)^2 \varphi_1 z - (\vartheta_2 z)^2 \varphi_2 z}{(z-x_1)(z-x_2)\cdots(z-x_n)} = A(z-x_{n+1})(z-x_{n+2})\cdots(z-x_\mu).$$

Wenn nun aber in dem Zähler der linken Seite dieser Gleichung die Coefficienten der ϑ durch die Grössen $x_1, x_2, \cdots x_n$ dem Vorigen gemäss ausgedrückt sind, so wird dieser Zähler identisch Null, wenn man für z nach und nach diese Grössen einsetzt, und daher muss er sich durch den Nenner, nämlich durch das Product $(z - x_1)(z - x_2) \cdots (z - x_n)$ ohne Rest theilen lassen. Der linke Theil dieser Gleichung ist daher eine ganze Function von z, deren Coefficienten rationale Ausdrücke aus den Grössen (20) sein werden. Alsdann aber zeigt die Gleichung (21), dass die noch übrigen Variablen, nämlich

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots x_\mu,$$

die Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom $(\mu - n)^{\text{ten}}$ Grade sind, nämlich der Gleichung

$$(22) \quad \cdots \quad \frac{(\vartheta_1 z)^2 \varphi_1 z - (\vartheta_2 z)^2 \varphi_2 z}{(z-x_1)(z-x_2)\cdots(z-x_n)} = 0.$$

Hienach kann man nun das Abel'sche Theorem in folgender Weise aussprechen: Bezeichnet man mit ψx ein Integral von der Art, welche in den vorigen §§ behandelt worden ist, und mit V den logarithmischen oder algebraischen Ausdruck, durch welchen sich die Summe solcher Integrale ausdrücken lässt, so ist

$$(23) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 \psi x_2 \cdots \varepsilon_n \psi x_n &= C + V - \varepsilon_{n+1} \psi x_{n+1} \\ &\quad - \varepsilon_{n+2} \psi x_{n+2} \cdots - \varepsilon_\mu \psi x_\mu; \end{aligned}$$

d. h. die Summe einer Anzahl algebraischer Integrale lässt sich ausdrücken durch einen logarithmischen oder algebraischen Ausdruck und eine Summe einer anderen Anzahl ähnlicher Integrale, und zwar sind dann die Variablen $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots x_\mu$

Digitized by Google

dieser letzteren Integrale die Wurzeln einer algebraischen Gleichung, nämlich der Gleichung (22); die Coefficienten aber der in dieser Gleichung vorkommenden Functionen ϑ sind vermittelst der Gleichungen (19) durch die Variablen $x_1, x_2, \cdots x_n$ der gegebenen Integrale auszudrücken.

Ueber die Grössen ε ist zu bemerken, dass $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ beliebig angenommen werden können, und man je nach der Annahme verschiedene Sätze erhält. Die Werthe von ε_{n+1}, $\varepsilon_{n+2}, \cdots \varepsilon_\mu$ dagegen sind nicht mehr beliebig, sondern zu ihrer Bestimmung dient der noch nicht benutzte Rest der Gleichungen (18), nämlich die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\vartheta_1 x_{n+1} \sqrt{\varphi_1 x_{n+1}} = \varepsilon_{n+1} \vartheta_2 x_{n+1} \sqrt{\varphi_2 x_{n+1}},\\
&\vartheta_1 x_{n+2} \sqrt{\varphi_1 x_{n+2}} = \varepsilon_{n+2} \vartheta_2 x_{n+2} \sqrt{\varphi_2 x_{n+2}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\vartheta_1 x_\mu \sqrt{\varphi_1 x_\mu} = \varepsilon_\mu \vartheta_2 x_\mu \sqrt{\varphi_2 x_\mu}.
\end{aligned}$$

Nachdem in diesen Gleichungen die Grössen $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots x_\mu$ und die Coefficienten der ϑ durch $x_1, x_2, \cdots x_n$ ausgedrückt worden sind, wodurch diese Gleichungen zu identischen werden, sind die Werthe der $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \cdots \varepsilon_\mu$ so zu bestimmen, dass die rechten Theile dieser Gleichungen dieselben Zeichen erhalten, wie die linken Theile.

Folgende, auch von *Abel* angewendete Bezeichnung dient dazu, die zu bestimmenden Grössen von den gegebenen besser zu unterscheiden. Die Variablen $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots x_\mu$ sollen mit dem Buchstaben y bezeichnet werden, und zwar sei

$$x_{n+1} = y_1, \; x_{n+2} = y_2, \; \cdots \; x_\mu = y_{\nu'},$$
$$\nu' = \mu - n.$$

Von den gegebenen Integralen haben einige das Zeichen $+$, andere das Zeichen $-$; die Anzahl der ersteren sei μ_1, die der letzteren μ_2, sodass

$$\mu_1 + \mu_2 = n,$$

und zwar sei

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_{\mu_1} = +1,\\
&\varepsilon_{\mu_1+1} = \varepsilon_{\mu_1+2} = \cdots = \varepsilon_n = -1.
\end{aligned}$$

Man behalte ferner für die Grössen $x_1, x_2, \cdots x_{\mu_1}$ die alte Bezeichnung bei, setze dagegen

$$x_{\mu_1+1} = x'_1, \; x_{\mu_1+2} = x'_2, \; \cdots \; x_n = x'_{\mu_2}.$$

Digitized by Google

Führt man endlich für die zu bestimmenden Grössen ε_{n+1}, ε_{n+2}, $\cdots$, ε_μ den Buchstaben ξ ein, und setzt

$$\varepsilon_{n+1} = \xi_1, \quad \varepsilon_{n+2} + \xi_2, \quad \cdots \quad \varepsilon_\mu = \xi_\nu',$$

so schreibt sich die Gleichung (23)

$$\left.\begin{array}{l} \psi x_1 + \psi x_2 \cdots + \psi x_{\mu 1} \\ - \psi x'_1 - \psi x'_2 \cdots - \psi x_{\mu 2} \end{array}\right\} = C + V - \xi_1 \psi y_1 - \xi_2 \psi y_2 \cdots - \xi_{\nu'} \psi y_{\nu'}$$

Dann sind die y die Wurzeln der Gleichung

$$(24) \quad \frac{(\vartheta_1 y)^2 \varphi_1 y - (\vartheta_2 y)^2 \varphi_2 y}{(y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_{\mu 1})(y-x'_1)(y-x'_2)\cdots(y-x'_{\mu 2})} = 0.$$

Die Coefficienten der ϑ sind zu bestimmen aus den Gleichungen

$$\begin{array}{l} \vartheta_1 x_1 \sqrt{\varphi_1 x_1} = \vartheta_2 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1} \\ \vartheta_1 x_2 \sqrt{\varphi_1 x_2} = \vartheta_2 x_2 \sqrt{\varphi_2 x_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vartheta_1 x_{\mu 1} \sqrt{\varphi_1 x_{\mu 1}} = \vartheta_2 x_{\mu 1} \sqrt{\varphi_2 x_{\mu 1}} \\ \vartheta_1 x'_1 \sqrt{\varphi_1 x_1} = -\vartheta_2 x'_1 \sqrt{\varphi_2 x'_1} \\ \vartheta_1 x'_1 \sqrt{\varphi_1 x'_2} = -\vartheta_2 x'_2 \sqrt{\varphi_2 x'_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vartheta_1 x'_{\mu 2} \sqrt{\varphi_1 x'_{\mu 2}} = -\vartheta_2 x'_{\mu 2} \sqrt{\varphi_2 x'_{\mu 2}}, \end{array}$$

endlich müssen die Grössen ξ aus folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$\begin{array}{l} \vartheta_1 y_1 \sqrt{\varphi_1 y_1} = \xi_1 \vartheta_2 y_1 \sqrt{\varphi_2 y_1} \\ \vartheta_1 y_2 \sqrt{\varphi_1 y_2} = \xi_2 \vartheta_2 y_2 \sqrt{\varphi_2 y_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vartheta_1 y_{\nu'} \sqrt{\varphi_1 y_{\nu'}} = \xi_{\nu'} \vartheta_2 y_{\nu'} \sqrt{\varphi_2 y_{\nu'}}. \end{array}$$

§ 39.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die verschiedenen Anzahlen μ, n, ν', etc. mit einander zu vergleichen, um zu ermitteln, welches die kleinste Anzahl, ν', der Integrale in den y ist, auf welche man eine gegebene Anzahl, n, von Integralen in x und x' reduciren kann, also auch welches der niedrigste Grad der algebraischen Gleichung (24) ist.

Die Function

$$Fz = (\vartheta_1 z)^2 \varphi_1 z - (\vartheta_2 z)^2 \varphi_2 z$$

Digitized by Google

hatte den Grad μ, und ϑ_1, ϑ_2, φ_1, φ_2 waren resp. von den Graden m_1, m_2, ν_1, ν_2. Wir hatten schon früher gesehen, dass die Function Fz entweder den Grad $2m_1 + \nu_1$ oder den Grad $2m_2 + \nu_2$ hat, je nachdem das erste oder das zweite ihrer beiden Glieder das von höherem Grade ist. Es ist also

$$\text{entweder } \mu = 2m_1 + \nu_1 \text{ oder } \mu = 2m_2 + \nu_2,$$

$$\text{und dann } \mu \overline{\overline{>}} 2m_2 + \nu_2 \text{ oder } \mu \overline{\overline{>}} 2m_1 + \nu_1.$$

Daher ist in jedem Falle

$$2\mu \overline{\overline{>}} 2m_1 + 2m_2 + \nu_1 + \nu_2,$$

also

$$\mu \overline{\overline{>}} m_1 + m_2 + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}.$$

Nun war aber

$$\mu = n + \nu' \quad \text{und} \quad n = m_1 + m_2 + 1,$$

also hat man

$$m_1 + m_2 + \nu' + 1 \overline{\overline{>}} m_1 + m_2 + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2},$$

oder

$$\nu' \overline{\overline{>}} \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} - 1.$$

Hieraus folgt, dass die Zahl ν' von der Anzahl n der gegebenen Integrale gänzlich unabhängig ist und nur von der Zahl $\nu_1 + \nu_2$, d. h. von dem Grade der Function φx, welche in den Integralen unter dem Wurzelzeichen vorkommt, abhängt. Ist nun diese Function von geradem Grade, und

$$\nu_1 + \nu_2 = 2\nu,$$

so ist

$$\nu' \overline{\overline{>}} \nu - 1.$$

Ist aber $\nu_1 + \nu_2$ ungerade $= 2\nu - 1$, so ist

$$\nu' \overline{\overline{>}} \nu - \tfrac{1}{2} - 1,$$

also, da ν' eine ganze Zahl sein muss, ebenfalls

$$\nu' \overline{\overline{>}} \nu - 1.$$

Hat also die Function φx unter dem Wurzelzeichen in den Integralen den Grad 2ν oder $2\nu - 1$, so ist die kleinste Anzahl der Integrale, auf welche man eine beliebige Anzahl gegebener Integrale reduciren kann, gleich $\nu - 1$, und dies ist zugleich der niedrigste Grad der Gleichung (24), deren Wurzeln

Digitized by Google

die Variablen dieser Integrale sind. Bei den elliptischen Integralen ist $\nu_1 + \nu_2$ entweder gleich 4 oder gleich 3, also $\nu = 2$. Man kann also die Summe einer beliebigen Anzahl von elliptischen Integralen auf ein einziges elliptisches Integral reduciren.

Wir wissen, dass die elliptischen Integrale von derselben Natur sind, mag die Function unter dem Wurzelzeichen vom 4ten oder vom 3ten Grade sein. Wir sehen nun, dass etwas Aehnliches auch bei höheren Integralen stattfindet, nämlich dass zwei Integrale dieselbe Natur besitzen, wenn bei dem einen die Function unter dem Wurzelzeichen vom $2\nu^{ten}$, bei dem anderen vom $(2\nu - 1)^{ten}$ Grade ist.

Der niedrigste Grad der Gleichung (24) für die y hängt also nur von dem Grade der Function φx ab, und ist unabhängig von der unter dem Integralzeichen noch hinzutretenden rationalen, ganzen oder gebrochenen Function $r(x)$. Ueberhaupt lehrt die Entstehung dieser Gleichung, dass sie von dieser noch hinzutretenden Function ganz unabhängig ist und für verschiedene solche Functionen dieselbe bleibt.

Endlich können wir auch die Grade m_1 und m_2 der Functionen ϑ_1 und ϑ_2 bestimmen, wenn die Anzahl $n = \mu_1 + \mu_2$ der zu summirenden Integrale gegeben ist. Es war nämlich

$$n = m_1 + m_2 + 1.$$

Für die Anzahl ν' der Integrale in den y nehmen wir nun ihren kleinsten Werth, nämlich $\nu - 1$ an; dann ist

$$\mu = n + \nu' = n + \nu - 1.$$

Andererseits war aber

$$\text{entweder } \mu = 2m_1 + \nu_1 \quad \text{oder} \quad \mu = 2m_2 + \nu_2.$$

Also ist

$$\text{entweder } n + \nu - 1 = 2m_1 + \nu_1 \text{ oder } n + \nu - 1 = 2m_2 + \nu_2$$

$$\text{und entw. } m_1 = \frac{n + \nu - \nu_1 - 1}{2} \quad \text{oder} \quad m_2 = \frac{n + \nu - \nu_2 - 1}{2}$$

und dann ist

$$\text{entw. } m_2 = n - 1 - \frac{n + \nu - \nu_1 - 1}{2} \text{ oder } m_1 = n - 1 - \frac{n + \nu - \nu_2 - 1}{2}$$

$$= \frac{n - \nu + \nu_1 - 1}{2} \qquad = \frac{n - \nu + \nu_2 - 1}{2}$$

$$= m_1 - \nu + \nu_1 \qquad = m_2 - \nu + \nu_2.$$

Digitized by Google

Bei den elliptischen Integralen kann man zunächst zwei in eines zusammensetzen, setzen wir also $n = 2$. Nehmen wir ferner, wie in dem Beispiele § 36,

$$\varphi_1 x = x, \quad \varphi_2 x = (1 - x)(1 - k^2 x),$$

so ist

$$\nu_1 = 1, \ \nu_2 = 2 \quad \text{und} \quad \nu = 2,$$

also wird

$$m_1 = \frac{2 + 2 - 1 - 1}{2} = 1, \quad m_2 = 1 - 2 + 1 = 0,$$

wodurch die Wahl der Functionen ϑ in obigem Beispiele gerechtfertigt ist.

§ 40.

Wir wollen nun die vorstehenden allgemeinen Betrachtungen auf das § 36 angeführte Beispiel anwenden, indem wir die Additionstheoreme der elliptischen Integrale aus dem Abel'schen Theorem herleiten.

Es sei, wie im § 36,

$$\vartheta_1 z = a + z, \ \varphi_1 z = z,$$
$$\vartheta_2 z = b, \quad \varphi_2 z = (1 - z)(1 - k^2 z),$$
$$\varphi z = z(1 - z)(1 - k^2 z),$$

$$Fz = (a + z)^2 z - b^2 (1 - z)(1 - k^2 z) = (z - x_1)(z - x_2)(z - x_3).$$

Bedeutet x eine der Grössen x_1, x_2, x_3, so ist

$$Fx = (a + x)^2 x - b^2 (1 - x)(1 - k^2 x) = 0, \quad (25)$$

also, wenn man vollständig nach x, a und b differentiirt,

$$F'x\,dx + 2(a + x)\,x\,da - 2b(1 - x)(1 - k^2 x)\,db = 0.$$

Aus (25) folgt aber

$$(a + x)\sqrt{x} = \varepsilon b \sqrt{(1 - x)(1 - k^2 x)}, \quad (26)$$

also

$$(a + x)\,x = \varepsilon b \sqrt{x(1 - x)(1 - k_2 x)}.$$

$$b(1 - x)(1 - k^2 x) = \varepsilon (a + x)\sqrt{x(1 - x)(1 - k^2 x)},$$

mithin

$$F'x\,dx + 2\varepsilon [b\,da - (a + x)\,db]\sqrt{x(1 - x)(1 - k^2 x)} = 0$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)(1 - k^2 x)}} &= \frac{2[(a + x)\,db - b\,da]}{F'x} \\ &= \frac{2(a\,db - b\,da)}{F'x} + \frac{2x\,db}{F'x} \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Digitized by Google

Setzt man hierin statt x nach und nach x_1, x_2, x_3 und addirt die drei Gleichungen, so erhellt sofort, dass die rechte Seite verschwindet, weil nach dem S. 143 angeführten Satze

$$\Sigma \frac{1}{F'x} = 0, \quad \Sigma \frac{x}{F'x} = 0$$

ist, wenn man diese Summen in Bezug auf die drei Wurzeln x_1, x_2, x_3 der Gleichung $Fx = 0$ nimmt. Demnach erhält man:

$$(28)\left\{\begin{aligned}&\varepsilon_1\int\frac{dx_1}{\sqrt{x_1(1-x_1)(1-k^2x_1)}}+\varepsilon_2\int\frac{dx_2}{\sqrt{x_2(1-x_2)(1-k^2x_2)}}\\&\qquad+\varepsilon_3\int\frac{dx_3}{\sqrt{x_3(1-x_3)(1-k^2x_3)}}=C,\end{aligned}\right.$$

wo C die willkürliche Constante bedeutet.

Multiplicirt man die Gleichung (27) mit

$$\frac{fx}{x-\alpha},$$

worin, wie früher, fx eine beliebige ganze Function bedeutet, so muss man mit der rechten Seite dieselbe Operation vornehmen, die wir § 37 ausführlich behandelt haben, und erhält dann

$$(29)\left\{\begin{aligned}&\varepsilon_1\int\frac{fx_1\,dx_1}{(x_1-\alpha)\sqrt{x_1(1-x_1)(1-k^2x_1)}}+\varepsilon_2\int\frac{fx_2\,dx_2}{(x_2-\alpha)\sqrt{x_2(1-x_2)(1-k^2x_2)}}\\&\qquad+\varepsilon_3\int\frac{fx_3\,dx_3}{(x_3-\alpha)\sqrt{x_3(1-x_3)(1-k^2x_3)}}=V.\end{aligned}\right.$$

Den Ausdruck für V kann man aus den früheren allgemeinen Formeln leicht herstellen. Denn man erhält zunächst aus (15), da $\delta\vartheta_2 z = db$, $\delta\vartheta_1 z = da$ ist,

$$(30)\left\{\begin{aligned}\delta V=&-\frac{2f\alpha\,[(a+\alpha)\,db-b\,da]}{(a+\alpha)^2\alpha-b^2(1-\alpha)(1-k^2\alpha)}\\&+\left[\frac{2fz\,[(a+z)\,db-b\,da]}{(z-\alpha)\,[(a+z)^2z-b^2(1-z)(1-k^2z)]}\right]z^{-1},\end{aligned}\right.$$

und dann nach der Integration aus (16)

$$(31)\left\{\begin{aligned}V=C&-\frac{f\alpha}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)(1-k^2\alpha)}}\log\frac{(a+\alpha)\sqrt{\alpha}+b\sqrt{(1-\alpha)(1-k^2\alpha)}}{(a+\alpha)\sqrt{\alpha}-b\sqrt{(1-\alpha)(1-k^2\alpha)}}\\&+\left[\frac{fz}{(z-\alpha)\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}}\log\frac{(a+z)\sqrt{z}+b\sqrt{(1-z)(1-k^2z)}}{(a+z)\sqrt{z}-b\sqrt{(1-z)(1-k^2z)}}\right]z^{-1}.\end{aligned}\right.$$

Wir nehmen nun x_1 und x_2 als die unabhängigen Varia-

Digitized by Google

blen an, und haben dann zunächst die Gleichungen aufzustellen, aus welchen die Coefficienten a und b der Functionen ϑ durch x_1 und x_2 auszudrücken sind. Diese Gleichungen entstehen aus (26), wenn man darin x_1 und x_2 statt x setzt; denn dieser Gleichung mit gehörig gewähltem ε genügen die drei Grössen x_1, x_2, x_3.

Wir wollen ferner annehmen, es sei

$$\varepsilon_1 = +1, \quad \varepsilon_2 = +1;$$

die Gleichung (28) zeigt dann, dass wir das Additionstheorem erhalten werden (setzt man dagegen $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = -1$, so erhält man das Subtractionstheorem). Unter dieser Annahme sind die beiden Gleichungen, aus welchen a und b durch x_1 und x_2 ausgedrückt werden müssen, folgende:

$$(a + x_1)\sqrt{x_1} = +b\sqrt{(1-x_1)(1-k^2x_1)},$$
$$(a + x_2)\sqrt{x_2} = +b\sqrt{(1-x_2)(1-k^2x_2)}.$$

Setzt man darin der Kürze wegen

$$\sqrt{\frac{(1-x_1)(1-k^2x_1)}{x_1}} = \omega_1, \quad \sqrt{\frac{(1-x_2)(1-k^2x_2)}{x_2}} = \omega_2,$$

so schreiben sie sich

$$a + x_1 = b\omega_1, \quad a + x_2 = b\omega_2,$$

und aus ihnen folgt

$$b = \frac{x_1 - x_2}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{(x_1 - x_2)(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}.$$

Es ist aber

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = \frac{(1-x_1)(1-k^2x_1)}{x_1} - \frac{(1-x_2)(1-k^2x_2)}{x_2}$$
$$= \frac{x_2(1 - x_1 - k^2x_1 + k^2x_1^2) - x_1(1 - x_2 - k^2x_2 + k^2x_2^2)}{x_1x_2}$$
$$= \frac{-(x_1 - x_2)(1 - k^2x_1x_2)}{x_1x_2},$$

also

$$b = -\frac{x_1x_2(\omega_1 + \omega_2)}{1 - k^2x_1x_2},$$

oder

$$b = -\sqrt{x_1x_2}\,\frac{\sqrt{x_2}\sqrt{(1-x_1)(1-k^2x_1)} + \sqrt{x_1}\sqrt{(1-x_2)(1-k^2x_2)}}{1 - k^2x_1x_2}. \quad (32)$$

Hiemit ist b durch x_1 und x_2 ausgedrückt. Alsdann erhält man a aus einer der Gleichungen

Digitized by Google

$$a = b\omega_1 - x_1 = b\omega_2 - x_2 = \frac{x_1\omega_2 - x_2\omega_1}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Zur Bestimmung von x_3 oder y_1, indem wir wie im § 38

$$x_3 = y_1$$

setzen, dient dann die Gleichung (24), die in diesem Falle vom 1ten Grade wird und lautet:

$$\frac{(a+y)^2 y - b^2(1-y)(1-k^2y)}{(y-x_1)(y-x_2)} = 0.$$

Substituirt man darin für a und b die eben gefundenen Werthe, so werden sich im Zähler die Factoren $y - x_1$ und $y - x_2$ absondern lassen. Statt aber diese Rechnung auszuführen, kann man auf einem kürzeren Wege zum Ziel gelangen. Die Grössen x_1, x_2, x_3 sind nämlich die Wurzeln der cubischen Gleichung (25). Ordnet man diese, so nimmt sie folgende Gestalt an:

(33) $\cdot\cdot\ x^3 - (k^2b^2 - 2a)x^2 + (a^2 + b^2 + k^2b^2)x - b^2 = 0,$

und dann folgt sogleich, dass das Product der drei Grössen x_1, x_2, x_3 gleich b^2 ist:

$$x_1 x_2 x_3 = b^2;$$

mithin ergiebt sich

$$x_3 = y_1 = \frac{b^2}{x_1 x_2}.$$

Substituirt man darin den Ausdruck (32) für b, so erhält man sofort

(34) $$x_3 = y_1 = \left(\frac{\sqrt{x_2}\sqrt{(1-x_1)(1-k^2x_1)} + \sqrt{x_1}\sqrt{(1-x_2)(1-k^2x_2)}}{1-k^2x_1x_2}\right)^2.$$

Endlich muss zur Bestimmung des Werthes von ε_3 geschritten werden, wofür wir dem § 38 gemäss ζ_1 schreiben. Dieser ergiebt sich aus der dritten der durch (26) repräsentirten Gleichungen, nämlich

(35) $\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ a + y_1 = \zeta_1 b\sqrt{\frac{(1-y_1)(1-k^2y_1)}{y_1}}.$

In dieser müssten a, b, y_1 durch x_1 und x_2 ausgedrückt und dann ζ_1 so gewählt werden, dass die Ausdrücke auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens dasselbe Zeichen erhalten. Wir können in dem gewählten Falle auch diese Rechnung vermeiden. Wenden wir uns nämlich zur Gleichung (28), und nehmen wir in derselben zuerst die willkürliche Constante C

Digitized by Google

so, dass die drei Integrale von Null anfangen, setzen alsdann dem Früheren gemäss

$$\varepsilon_1 = +1, \quad \varepsilon_2 = +1, \quad \varepsilon_3 = \zeta_1, \quad x_3 = y_1,$$

so können wir diese Gleichung so schreiben:

$$\int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\sqrt{x_1(1-x_1)(1-k^2x_1)}} + \int_0^{x_2} \frac{dx_2}{\sqrt{x_2(1-x_2)(1-k^2x_2)}} = C - \zeta_1 \int_0^{y_1} \frac{dy_1}{\sqrt{y_1(1-y_1)(1-k^2y_1)}}.$$

Dann ergiebt sich zunächst die Bestimmung der willkürlichen Constante C. Setzt man nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$, so lehrt die Gleichung (34), dass auch $y_1 = 0$ ist, dann verschwinden also alle drei Integrale, und folglich muss auch

$$C = 0$$

sein. Da aber die Integrale von Null anfangen, so bleiben sie nur so lange reell, als ihre obere Grenze den Werth $+1$ nicht überschreitet, und dann haben sie positive Werthe. Nehmen wir daher jetzt an, dass x_1 und x_2 positive echte Brüche sind, so ist der linke Theil der vorigen Gleichung eine reelle und positive Grösse, folglich muss auch der rechte Theil reell und positiv sein. Also muss erstens y ebenfalls ein positiver echter Bruch sein, und zweitens muss

$$\zeta_1 = -1$$

sein. Demnach wird die vorige Gleichung

$$\int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\sqrt{x_1(1-x_1)(1-k^2x_1)}} + \int_0^{x_2} \frac{dx_2}{\sqrt{x_2(1-x_2)(1-k^2x_2)}} = \int_0^{y_1} \frac{dy_1}{\sqrt{y_1(1-y_1)(1-k^2y_1)}},$$

und die Gleichung (34) liefert dann die bekannte Summenformel. Setzt man nämlich

$$\frac{1}{2}\int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\sqrt{x_1(1-x_1)(1-k^2x_1)}} = u, \quad \frac{1}{2}\int_0^{x_2} \frac{dx_2}{\sqrt{x_2(1-x_2)(1-k^2x_2)}} = v,$$

sodass

$$\sqrt{x_1} = \sin am\, u, \quad \sqrt{x_2} = \sin am\, v, \quad \sqrt{y_1} = \sin am\,(u+v),$$

Digitized by Google

und macht ferner zur Abkürzung

$$am\, u = \varphi, \quad am\, v = \psi, \quad am\,(u+v) = \sigma,$$

so erhält man aus (34)

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

und ferner aus (32) für b den Ausdruck

(36) . . . . $b = -\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma.$

Etwas mehr Umstände macht die Bestimmung von ζ_1, wenn $\varepsilon_1 = +1$ und $\varepsilon_2 = -1$ angenommen wird; man muss dann die Gleichung (35) wirklich hinzuziehen und namentlich darauf Rücksicht nehmen, ob x_2 grösser oder kleiner als x_1 ist. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen, nur möge noch folgende Bemerkung Platz finden.

Die drei durch (26) repräsentirten Gleichungen heissen, indem nun $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = +1$, $\varepsilon_3 = \zeta_1 = -1$ zu setzen ist,

$$a + x_1 = b\sqrt{\frac{(1-x_1)(1-k^2x_1)}{x_1}},$$

$$a + x_2 = b\sqrt{\frac{(1-x_2)(1-k^2x_2)}{x_2}},$$

$$a + y_1 = -b\sqrt{\frac{(1-y_1)(1-k^2y_1)}{y_1}}.$$

Führt man darin zunächst φ, ψ und σ statt x_1, x_2 und y_1 ein, so lauten sie

$$(37) \quad \cdots \quad \begin{cases} a + \sin^2\varphi = b\,\dfrac{\cos\varphi\,\Delta\varphi}{\sin\varphi}, \\ a + \sin^2\psi = b\,\dfrac{\cos\psi\,\Delta\psi}{\sin\psi}, \\ a + \sin^2\sigma = -b\,\dfrac{\cos\sigma\,\Delta\sigma}{\sin\sigma}. \end{cases}$$

Nun kann man aber für $a+1$ einen einfachen Ausdruck herstellen. Aus der Gleichung (33) folgt nämlich

$$\begin{aligned} k^2b^2 - 2a &= x_1 + x_2 + x_3, \\ a^2 + b^2 + k^2b^2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ b^2 &= x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Subtrahirt man die erste und dritte dieser Gleichungen von der zweiten, so kommt

$$a^2 + 2a = -(x_1+x_2+x_3) + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3,$$

Digitized by Google

und man erhält daher

$$(a+1)^2 = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3),$$

das heisst

$$a+1 = \cos\varphi \,.\, \cos\psi \,.\, \cos\sigma\,.$$

Substituirt man dies, sowie den Werth von b aus (36), so erhält man

$$\begin{aligned}
\cos\varphi\cos\psi\cos\sigma - \cos^2\varphi &= -\sin\psi\sin\sigma\cos\varphi\,\Delta\varphi,\\
\cos\varphi\cos\psi\cos\sigma - \cos^2\psi &= -\sin\varphi\sin\sigma\cos\psi\,\Delta\psi,\\
\cos\varphi\cos\psi\cos\sigma - \cos^2\sigma &= +\sin\varphi\sin\psi\cos\sigma\,\Delta\sigma,
\end{aligned}$$

und daraus durch Division mit resp. $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\sigma$:

$$\begin{aligned}
\cos\psi\cos\sigma + \sin\psi\sin\sigma\,\Delta\varphi &= \cos\varphi,\\
\cos\varphi\cos\sigma + \sin\varphi\sin\sigma\,\Delta\psi &= \cos\psi,\\
\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\sigma &= \cos\sigma,
\end{aligned}$$

sodass erhellt, dass die drei durch die Gleichung (26) repräsentirten Gleichungen nichts anderes sind, als die drei Lagrange'schen Gleichungen (27) des § 29.

Wir gehen nun zu der zweiten Gattung über. Dazu müssen wir uns der allgemeinen Gleichungen (29), (30), (31), bedienen. Zu bemerken ist aber, dass die im Vorigen in Betreff y_1 und ξ_1 gemachten Bestimmungen alle bestehen bleiben, weil diese von der besonderen Form der Function fx ganz unabhängig sind. Nun haben wir schon § 36 gesehen, dass man, um zur zweiten Gattung zu gelangen,

$$\frac{fx}{x-\alpha} = \tfrac{1}{2}(1-k^2x)$$

setzen müsse. Da nun die Gleichung (29) unter dieser Annahme und mit Anwendung der vorigen Bestimmungen in folgende übergeht:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{x_1}\frac{(1-k^2x_1)\,dx_1}{\sqrt{x_1(1-x_1)(1-k^2x_1)}} + \tfrac{1}{2}\int_0^{x_2}\frac{(1-k^2x_2)\,dx_2}{\sqrt{x_2(1-x_2)(1-k^2x_2)}} = \tfrac{1}{2}\int_0^{y_1}\frac{(1-k^2y_1)\,dy_1}{\sqrt{y_1(1-y_1)(1-k^2y_1)}} + V,$$

so erhält man mit Rücksicht auf die S. 139 gemachten Bemerkungen

$$E(u) + E(v) = E(u+v) + V \quad \cdots \quad (38)$$

und es handelt sich nur darum, den Werth von V für

Digitized by Google

die specielle Form der Function fx aus (30) oder (31) zu ermitteln.

Zunächst verschwindet, wie schon S. 146 bemerkt, das erste Glied, denn da $fx = \frac{1}{2}(x - \alpha)(1 - k^2 x)$ ist, so ist

$$f\alpha = 0.$$

Daher wird jetzt aus (30)

$$\delta V = \left[\frac{(1 - k^2 z)\,[(a + z)\,db - b\,da]}{(a + z)^2 z - b^2 (1 - z)(1 - k^2 z)}\right]_{z=1}.$$

Der Nenner dieses Ausdrucks ist vom 3ten Grade und der Coefficient von z^3 gleich 1. Entwickelt man also den Bruch

$$\frac{1}{(a + z)^2 z - b^2 (1 - z)(1 - k^2 z)}$$

nach fallenden Potenzen von z, so wird diese Entwicklung mit dem Gliede

$$\frac{1}{z^3}$$

beginnen. Der gesuchte Coefficient von $\frac{1}{z}$ wird also anderes sein, als der Coefficient von z^2 im Zähler. Daher erhält man ohne Weiteres

$$\delta V = -k^2\,db,$$

und folglich

$$V = C - k^2 b.$$

Substituirt man darin für b den Ausdruck aus (36), so wird

$$V = C + k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\sigma$$
$$= C + k^2 \sin am\,u \sin am\,v \sin am\,(u + v).$$

Setzt man diesen Ausdruck in (38) ein, so sieht man, da $E(0) = 0$ ist, dass für $u = 0$ und $v = 0$ alle Glieder Null werden, also ist auch $C = 0$ und man erhält

$$E(u) + E(v) = E(u + v) + k^2 \sin am\,u \sin am\,v \sin am\,(u + v).$$

Bezeichnet man mit c den Parameter eines elliptischen Integrals dritter Gattung und setzt

$$am\,c = \delta,$$

so haben wir S. 140 gesehen, dass man, um auf ein solches Integral zu gelangen,

Digitized by Google

$$\alpha = \frac{1}{k^2 \sin^2 \delta} \text{ und } fx = -\tfrac{1}{2} \frac{\cos\delta \, \Delta\delta}{\sin\delta} \, x \quad \cdot \cdot \quad (39)$$

setzen muss, dann wird

$$\Pi(u, c) = -\tfrac{1}{2} \int_0^{x_1} \frac{\frac{\cos\delta \, \Delta\delta}{\sin\delta} x_1 \, dx_1}{(x_1 - \alpha) \sqrt{x_1 (1 - x_1)(1 - k^2 x_1)}},$$

$$\Pi(v, c) = -\tfrac{1}{2} \int_0^{x_2} \frac{\frac{\cos\delta \, \Delta\delta}{\sin\delta} x_2 \, dx_2}{(x_2 - \alpha) \sqrt{x_2 (1 - x_2)(1 - k^2 x_2)}},$$

$$\Pi(u + v, c) = -\tfrac{1}{2} \int_0^{y_1} \frac{\frac{\cos\delta \, \Delta\delta}{\sin\delta} y_1 \, dy_1}{(y_1 - \alpha) \sqrt{y_1 (1 - y_1)(1 - k^2 y_1)}}.$$

Man erhält ferner aus (29)

$$\Pi(u, c) + \Pi(v, c) = \Pi(u + v, c) + V, \quad \cdot \cdot \quad (40)$$

und hat nun den Werth von V für diesen Fall aus (30) zu bestimmen, indem man darin die Werthe (39) substituirt.

Wir haben schon im § 37 gesehen, dass bei den elliptischen Integralen dritter Gattung das Entwickelungsglied verschwindet, weil nämlich hier $(fx)^2$ vom zweiten Grade, die Function $x(1 - x)(1 - k^2 x)$, die bei der allgemeinen Betrachtung mit φx bezeichnet war, dagegen vom 3ten Grade ist.

Es bleibt also in dem Ausdrucke (31) für V nur das erste, in $f\alpha$ multiplicirte Glied übrig, sodass man diesen Ausdruck nach Substitution der in (39) angegebenen Form für die Function f nun so schreiben kann:

$$V = C + \tfrac{1}{2} \frac{\cos\delta \, \Delta\delta}{\sin\delta} \sqrt{\frac{\alpha}{(1 - \alpha)(1 - k^2 \alpha)}} \log \frac{a + \alpha + b\sqrt{\frac{(1-\alpha)(1-k^2\alpha)}{\alpha}}}{a + \alpha - b\sqrt{\frac{(1-\alpha)(1-k^2\alpha)}{\alpha}}}.$$

Nun ist aber

$$\alpha = \frac{1}{k^2 \sin^2 \delta}, \quad 1 - \alpha = -\frac{\Delta^2 \delta}{k^2 \sin^2 \delta}, \quad 1 - k^2 \alpha = -\frac{\cos^2 \delta}{\sin^2 \delta},$$

mithin

$$\sqrt{\frac{\alpha}{(1 - \alpha)(1 - k^2 \alpha)}} = \frac{\sin\delta}{\cos\delta \, \Delta\delta},$$

sodass der vor dem Logarithmus stehende Factor sich bis auf den Bruch $\frac{1}{2}$ forthebt, und man erhält

Digitized by Google

$$V = C + \tfrac{1}{2}\log\frac{\alpha + \frac{1}{k^2\sin^2\delta} + b\cdot\frac{\cos\delta\,\Delta\delta}{\sin\delta}}{a + \frac{1}{k^2\sin^2\delta} - b\cdot\frac{\cos\delta\,\Delta\delta}{\sin\delta}}$$

$$= C + \tfrac{1}{2}\log\frac{1 + k^2\sin^2\delta\cdot a + b\cdot k^2\sin\delta\cdot\cos\delta\cdot\Delta\delta}{1 + k^2\sin^2\delta\cdot a - b\cdot k^2\sin\delta\cdot\cos\delta\cdot\Delta\delta},$$

oder wenn zur Abkürzung

$$\frac{1 + k^2\sin^2\delta\cdot a + b\,k^2\sin\delta\cdot\cos\delta\cdot\Delta\delta}{1 + k^2\sin^2\delta\cdot a - b\,k^2\sin\delta\cdot\cos\delta\cdot\Delta\delta} = H$$

gesetzt wird,

(41) . . . . . $V = C + \tfrac{1}{2}\log H.$

In H müssen jetzt für b und a ihre Ausdrücke durch ψ, φ und σ substituirt werden. Nach (36) ist

$$b = -\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma;$$

was dagegen a anbelangt, so ist es wichtig, unter den Ausdrücken, die für diese Grösse zur Verfügung stehen, den passendsten zu treffen, weil man sich sonst in weitläufige Rechnungen verwickelt. Man gelangt aber sofort zu der einfachsten Form für H, wenn man a aus der letzten der Gleichungen (37) entnimmt. Aus dieser folgt nämlich

$$a = -\sin^2\sigma - b\,\frac{\cos\sigma\,\Delta\sigma}{\sin\sigma}$$

$$= -\sin^2\sigma + \sin\varphi\sin\psi\cos\sigma\,\Delta\sigma.$$

Setzt man diese Werthe für a und b ein, so wird

$$H = \frac{1 - k^2\sin^2\delta\sin^2\sigma - k^2\sin\delta\sin\varphi\sin\psi\,(\sin\sigma\cos\delta\,\Delta\delta - \sin\delta\cos\sigma\,\Delta\sigma)}{1 - k^2\sin^2\delta\sin^2\sigma + k^2\sin\delta\sin\varphi\sin\psi\,(\sin\sigma\cos\delta\,\Delta\delta + \sin\delta\cos\sigma\,\Delta\sigma)}$$

$$= \frac{1 - k^2\sin\delta\sin\varphi\sin\psi\,\frac{\sin\sigma\cos\delta\,\Delta\delta - \sin\delta\cos\sigma\,\Delta\sigma}{1 - k^2\sin^2\sigma\sin^2\delta}}{1 + k^2\sin\delta\sin\varphi\sin\psi\,\frac{\sin\sigma\cos\delta\,\Delta\delta + \sin\delta\cos\sigma\Delta\sigma}{1 - k^2\sin^2\sigma\sin^2\delta}}$$

Hierdurch sind wir wieder auf den schon S. 133 gegebenen Ausdruck zurückgekommen, und da auch hier die Constante C verschwinden muss, was sich auf ähnliche Weise wie vorhin bei der zweiten Gattung ergiebt, so erhält man das Additionstheorem der dritten Gattung in derselben Form wie § 35.

Digitized by Google

Zehnter Abschnitt.

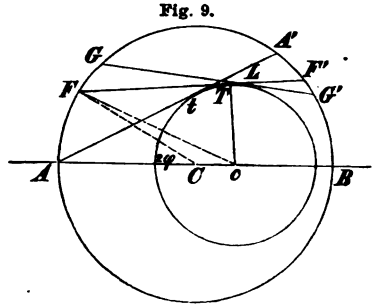
Jacobi's geometrische Construction des Additionstheorems*).

§ 41.

Wir gehen nun zu einigen geometrischen Betrachtungen über, die von *Jacobi* herrühren, zunächst noch mit dem Additionstheorem zusammenhängen und eine Construction desselben liefern, die uns dann aber auch zur Berechnung der elliptischen Integrale führen werden.

Es seien (Fig. 9) C und c die Mittelpunkte zweier Kreise, von denen der letztere ganz innerhalb des ersteren liegt, und R und r ihre Radien, ferner $\delta = Cc$ der Abstand der beiden Mittelpunkte von einander. Die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte sei AB. Auf der Peripherie des äusseren Kreises nehmen wir einen veränderlichen Punkt F an, dessen Lage durch den Winkel, den der veränderliche Radius CF mit dem festen Radius AC bildet, gegeben sei. Diesen Winkel bezeichnen wir mit 2φ; also

Fig. 9.



$$ACF = 2\varphi.$$

Aus F lege man eine Tangente an den inneren Kreis, nenne den Berührungspunkt T und drücke die Länge der Geraden FT durch φ, R, r, δ aus. Zieht man die Geraden Fc und Tc, so ist

$$\overline{FT}^2 = \overline{Fc}^2 - r^2 \text{ und } \overline{Fc}^2 = R^2 + \delta^2 + 2R\delta\cos 2\varphi;$$

also, wenn man noch $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$ setzt,

---

*) *Jacobi*, Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein Problem der Elementargeometrie. Crelle's Journ. Bd. 3.

Digitized by Google

$$\overline{FT}^2 = (R+\delta)^2 - r^2 - 4\delta R \sin^2\varphi,$$

$$\overline{FT} = \sqrt{(R+\delta)^2 - r^2}\sqrt{(1 - \frac{4\delta R}{(R+\delta)^2 - r^2}\sin^2\varphi)}.$$

Setzt man nun

$$\frac{4\delta R}{(R+\delta)^2 - r^2} = k^2,$$

so wird

$$\overline{FT} = \sqrt{(R+\delta)^2 - r^2}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$$
$$= \sqrt{(R+\delta)^2 - r^2}\,\Delta\varphi.$$

Drückt man den vor $\Delta\varphi$ stehenden Factor durch k aus, so kann man auch schreiben

(1) . . . . . $\overline{FT} = \frac{2\sqrt{\delta R}}{k}\Delta\varphi.$

Um die geometrische Bedeutung dieses Factors einzusehen, darf man nur den Punkt F so wählen, dass das zugehörige $\Delta\varphi$ den Werth 1 erhält. Man hat also $\varphi = 0$ zu setzen, d. h. den Punkt F mit dem Punkte A zusammenfallen zu lassen. Zieht man dann aus A eine Tangente an den kleinen Kreis und nennt t den Berührungspunkt, so ist, wie auch aus der Figur unmittelbar erhellt,

$$\sqrt{(R+\delta)^2 - r^2} = \frac{2\sqrt{\delta R}}{k} = \overline{At},$$

also auch

(2) . . . . . $\overline{FT} = \overline{At}\cdot\Delta\varphi.$

Diese Gleichung gilt, wo auch der Punkt F auf der Peripherie des äusseren Kreises liegen mag. Bezeichnet nun F' den Punkt, in welchem die Tangente FT den äusseren Kreis zum zweiten Male schneidet, und nennt man $2\varphi'$ den Winkel zwischen dem Radius CF' und dem festen Radius CA, setzt also

$$ACF' = 2\varphi',$$

so ist auch

(3) . . . . . $\overline{F'T} = \overline{At}\cdot\Delta\varphi'.$

Untersuchen wir nun zuerst, wann der Modul k^2 kleiner als 1 ist. Damit dies eintritt, muss man haben

$$4\delta R < (R+\delta)^2 - r^2, \quad r^2 < (R-\delta)^2.$$

Liegt nun der Mittelpunkt c des kleineren Kreises innerhalb

Digitized by Google

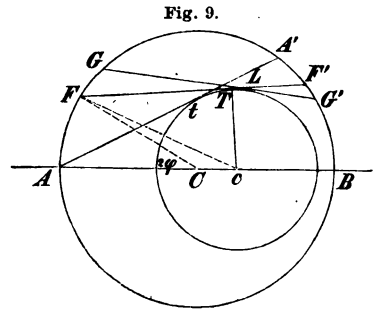
des grösseren Kreises, so ist $R > \delta$, also $R - \delta$ positiv, und daher muss

$$r < R - \delta$$

sein, d. h. der kleinere Kreis muss ganz innerhalb des grösseren liegen und denselben nicht schneiden, wenn k^2 ein echter Bruch sein soll. [Anm. Läge der Mittelpunkt c ausserhalb des Kreises mit dem Mittelpunkte C, so würde $\delta - R$ positiv sein, und man würde dann $r < \delta - R$ haben. Dann müsste also der Kreis c ganz ausserhalb des Kreises C liegen. Wir wollen hier nur den ersten Fall verfolgen.]

Um nun zuerst anzudeuten, worauf diese Betrachtungen hinzielen, wollen wir zeigen, dass die beiden Winkel φ und φ', welche den Endpunkten F und F' der Tangente FT angehören, der elliptischen Differentialgleichung genügen. Zu diesem Ende lassen wir den Winkel φ um einen beliebigen Winkel h wachsen, und es sei (Fig. 9)

Fig. 9.



$$ACG = 2(\varphi + h), \text{ also } FCG = 2h.$$

Aus G ziehen wir die Tangente GG' an den kleinen Kreis und bezeichnen den dadurch entstehenden Zuwachs des Winkels φ' durch h', so dass

$$ACG' = 2(\varphi' + h') \text{ und } F'CG' = 2h'.$$

Die Winkel h und h' sind beliebige endliche Winkel; man bemerke aber, dass das Verhältniss derselben $\frac{h}{h'}$, wenn beide verschwinden, dem Differentialverhältniss $\frac{d\varphi}{d\varphi'}$ gleich wird, nämlich

$$\lim \frac{h}{h'} = \frac{d\varphi}{d\varphi'} \text{ (für } h = 0).$$

Bezeichnet L den Durchschnittspunkt der Geraden FF' und GG', und zieht man die Sehnen FG und $F'G'$, so hat man zwei ähnliche Dreiecke FLG und $G'LF'$, mithin

$$\frac{FG}{F'G'} = \frac{FL}{G'L}.$$

Digitized by Google

Nun ist aber

$$FG = 2R \sin h, \quad F'G' = 2R \sin h',$$

also

$$\frac{FG}{F'G'} = \frac{\sin h}{\sin h'} = \frac{h \frac{\sin h}{h}}{h' \frac{\sin h'}{h'}} = \frac{FL}{G'L}.$$

Lässt man nun h verschwinden, also GG' mit FF' zusammenfallen, so ist

$$\lim \frac{\sin h}{h} = 1, \ \lim \frac{\sin h'}{h'} = 1, \ \lim \frac{h}{h'} = \frac{d\varphi}{d\varphi'} \ (\text{für } h = 0),$$

ferner fallen dann die Punkte L und G' resp. mit den Punkten T und F' zusammen, man erhält also

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{FT}{F'T},$$

und wenn man darin die Werthe von FT und $F'T$ aus (2) und (3) substituirt,

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi'}$$

oder

$$(4) \quad \cdots\cdots \quad \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} - \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 0.$$

Die Winkel φ und φ' genügen also wirklich der elliptischen Differentialgleichung, und zwar derjenigen für die Subtraction. Ehe wir nun weiter gehen und namentlich Integralgleichungen vorstehender Differentialgleichung, d. h. endliche Beziehungen zwischen den Winkeln φ und φ' auf geometrischem Wege aufsuchen, wollen wir zuerst den Modul k^2 näher betrachten und die zur folgenden Construction nothwendigen Aufgaben lösen.

§ 42.

Den grösseren Kreis mit dem Radius R, sowie den auf der Peripherie des ersteren liegenden Punkt A, von welchem an die Winkel φ und φ' gezählt werden, nehmen wir als fest an, und man kann auch an die Vorstellung anknüpfen, dass der Radius R als Längeneinheit angenommen werde, in welchem Falle die Bogen AF und AF' den Winkeln 2φ und $2\varphi'$ gleich werden.

Digitized by Google

Wenn ausser dem grösseren Kreise auch noch der kleinere Kreis gegeben ist, so ist damit auch der Modul k gegeben. Wenn aber umgekehrt k gegeben ist, und dies ist bei der Differentialgleichung (4) in der That der Fall, so ist damit der kleinere Kreis noch nicht vollständig gegeben, denn da

$$k^2 = \frac{4\delta R}{(R+\delta)^2 - r^2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

ist, so kann man einer der beiden Grössen δ und r, von welchen die Lage und Grösse des kleinen Kreises abhängt, sehr verschiedene Werthe zuertheilen und dann mittelst der vorigen Gleichung und dem gegebenen Werthe von k jedesmal den entsprechenden Werth der anderen Grösse berechnen. Zu einem und demselben Werthe des Moduls k gehört also ein ganzes System von unendlich vielen inneren Kreisen, und es fragt sich, in welcher geometrischen Beziehung alle diese Kreise zu einander stehen.

Es soll nun nachgewiesen werden, dass alle diese Kreise, welche zu demselben Werthe des Moduls k gehören, dadurch charakterisirt sind, dass sie mit dem äusseren Kreise eine gemeinschaftliche Linie der gleichen Tangenten haben.

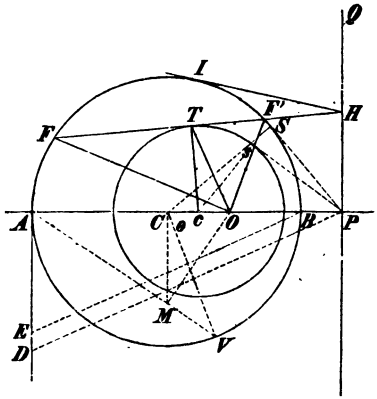
Es ist bekannt, dass der geometrische Ort für alle Punkte, die die Eigenschaft haben, dass die aus einem dieser Punkte an zwei gegebene Kreise gelegten Tangenten einander gleich sind, eine gerade Linie ist, welcher eben dieser Eigenschaft wegen *Steiner* den Namen der Linie der gleichen Tangenten gegeben hat. Diese Gerade steht senkrecht auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Kreise. Schneiden sich die letzteren, so geht jene Gerade durch die beiden Durchschnittspunkte, liegen die Kreise ganz ausser einander, so liegt sie zwischen beiden, und liegt der eine Kreis ganz innerhalb des anderen, so liegt die Linie der gleichen Tangenten ausserhalb beider Kreise, und zwar auf derselben Seite, auf welcher der Mittelpunkt des inneren Kreises von dem des äusseren aus gerechnet liegt.

Um die Lage der Linie der gleichen Tangenten für zwei gegebene Kreise zu finden, hat man hienach nur nöthig, einen Punkt derselben zu bestimmen. Wir wollen denjenigen

Digitized by Google

Punkt P (Fig. 10) zu bestimmen suchen, in welchem die Linie der gleichen Tangenten die Verbindungslinie AB der Mittelpunkte der beiden Kreise C und c schneidet. Es sei PQ die Linie der gleichen Tangenten für die Kreise C und c. Legt man von P aus an die letzteren die Tangenten PS und Ps, so ist der Punkt P aus der Bedingung, dass

Fig. 10.



$$PS = Ps$$

sei, zu bestimmen. Es ist aber

$$\overline{PS}^2 = \overline{CP}^2 - R^2,$$

$$\overline{Ps}^2 = \overline{cP}^2 - r^2$$

und

$$cP = CP - \delta;$$

also hat man zur Bestimmung der Entfernung CP des Punktes P vom Mittelpunkt C die Gleichung

$$\overline{CP}^2 - R^2 = (CP - \delta)^2 - r^2,$$

aus welcher

$$CP = \frac{R^2 + \delta^2 - r^2}{2\delta}$$

und

$$AP = R + \frac{R^2 + \delta^2 - r^2}{2\delta} = \frac{(R + \delta)^2 - r^2}{2\delta}$$

folgt. Führt man aber hierin k^2 mittelst der Gleichung (5) ein, so erhält man

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad AP = \frac{2R}{k^2}.$$

Hieraus folgt, dass die Entfernung des Punktes P vom Punkte A nur von k^2 abhängig ist. Wie man also auch sonst die Grössen r und δ, d. h. die Grösse und Lage des inneren Kreises, variiren mag, wenn nur der Modul k denselben Werth beibehält, so bleibt die Linie der gleichen Tangenten PQ unverändert dieselbe.

Es gehört also in der That zu einem gegebenen Werthe des Moduls k eine Schaar von inneren Kreisen, welche alle mit dem äusseren Kreise die nämliche Linie der gleichen Tangenten besitzen; und zugleich folgt aus den oben angeführten Eigenschaften der Linie der gleichen Tangenten,

Digitized by Google

dass von diesen Kreisen jeder den folgenden ganz umschliesst, und keine zwei dieser Kreise einander schneiden.

Die Formel (6) bietet auch ein leichtes Mittel, für einen gegebenen Werth von k die zugehörige Linie der gleichen Tangenten zu construiren; denn da man diese Gleichung als Proportion so schreiben kann:

$$AP : 2R = R : Rk^2,$$

so braucht man nur durch den Punkt A eine beliebige Gerade zu ziehen und auf derselben $AD = R$, $AE = Rk^2$ zu machen, dann EB, und DP parallel mit EB zu ziehen; so ist P der Durchschnittspunkt der Linie der gleichen Tangenten mit AB.

Kennt man nun auf diese Weise die zu einem gegebenen Modul zugehörige Linie der gleichen Tangenten, so kann man nachstehende, für die Folge nothwendige Aufgabe lösen: Aus der zu einem gegebenen Werthe von k gehörigen Schaar von Kreisen denjenigen Kreis zu finden, welcher eine gegebene Sehne des äusseren Kreises berührt.

Es sei FF' die gegebene Sehne. Man construire zuerst die zu dem gegebenen Werthe von k gehörige Linie der gleichen Tangenten PQ, verlängere die gegebene Sehne FF', bis sie die Gerade PQ in H schneidet. Aus H lege man eine Tangente HI an den äusseren Kreis und mache auf der gegebenen Sehne $HT = HI$. Dann ist T der Berührungspunkt, und wenn man in T eine Senkrechte auf FF' errichtet, welche die Gerade AB in c schneide, so ist c der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

§ 43.

Die soeben erwähnte Aufgabe kann man auch auf eine andere Weise lösen, indem man dazu statt der Linie der gleichen Tangenten einen gewissen Punkt benutzt, der auf folgende Weise entsteht. Da die Linie der gleichen Tangenten immer auf derjenigen Seite des Mittelpunktes C liegt, auf welcher sich auch der andere Mittelpunkt c befindet, so kann dieser letztere Punkt nicht auf die andere Seite hinüber rücken, ohne dass sich die Lage der Linie der gleichen Tangenten ändert, sondern er kann höchstens mit C zusammenfallen. Es ist also 0 der kleinste Werth, den der

Digitized by Google

Abstand δ annehmen kann. Da man nun die Gleichung (5) schreiben kann

$$r^2 = \frac{k^2(R+\delta)^2 - 4\delta R}{k^2},$$

so zeigt sie, dass für $\delta = 0$, $r = R$ wird, dass also dann der innere Kreis mit dem äusseren zusammenfällt. Es fragt sich nun, welches der grösste Werth ist, den δ annehmen darf. Da offenbar δ immer grösser wird, je mehr der Radius r abnimmt (weil nämlich jeder Kreis den folgenden umschliesst und der Mittelpunkt stets nach der Seite hinrückt, auf welcher die Linie der gleichen Tangenten liegt), so wird δ seinen grössten Werth erreichen, wenn r verschwindet, wenn der innere Kreis also in einen Punkt degenerirt. Wir wollen diesen Punkt den Grenzpunkt nennen und mit O bezeichnen. Die Lage desselben können wir bestimmen, wenn wir in (5) $\delta = CO$ und $r = 0$ setzen, dann erhalten wir

$$k^2 = \frac{4R \cdot \overline{CO}}{(R+\overline{CO})^2},$$

oder wenn wir das Complement des Moduls, $k'^2 = 1 - k^2$, ausdrücken,

$$k'^2 = \frac{(R-CO)^2}{(R+CO)^2}.$$

Da nun jedenfalls $CO < R$ ist, weil der Grenzpunkt innerhalb des äusseren Kreises liegen muss, wenn für ihn die Linie der gleichen Tangenten ihre Lage nicht verändern soll, so ist

$$k' = \frac{R-CO}{R+CO}, \text{ und daraus folgt } \frac{CO}{R} = \frac{1-k'}{1+k'}.$$

Dieser Werth spielt in der Folge eine grosse Rolle; wir bezeichnen ihn mit k_0, setzen also

$$(7) \quad \cdots \quad k_0 = \frac{1-k'}{1+k'},$$

und nennen ihn den transformirten Modul. Dann wird

$$CO = Rk_0.$$

Hiedurch ist die Lage des Grenzpunktes O bestimmt, man kann hieraus seine Entfernung vom Mittelpunkte C berechnen. Um ihn auch für einen gegebenen Werth von k zu construiren, bestimme man einen Winkel θ so, dass

$$k = \sin\theta,$$

Digitized by Google

was immer geschehen kann, da k ein echter Bruch ist; dann wird $k' = \cos\theta$ und

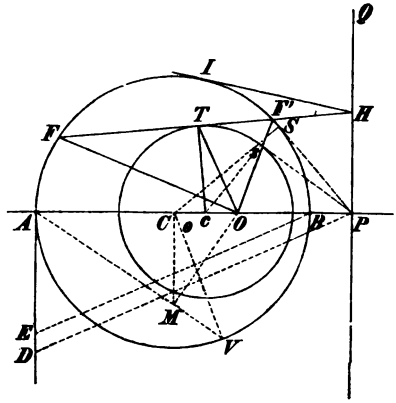
$$k_0 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\theta, \quad \text{also } CO = R\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\theta.$$

Man mache nun (Fig. 10) VCB gleich dem gegebenen Winkel θ und ziehe VA, so ist $VAB = \frac{1}{2}\theta$. Errichtet man dann in C eine Senkrechte auf AB, welche die Gerade AV in M schneide, so ist $CM = R\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$. Errichtet man ferner in M eine Senkrechte auf AV, welche AB in O schneide, so ist auch $CMO = \frac{1}{2}\theta$, also

$$CO = CM\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta = R\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\theta,$$

mithin O der gesuchte Grenzpunkt.

Fig. 10.



Da der Grenzpunkt O die Stelle eines der inneren Kreise vertritt, so nimmt jede durch ihn hindurchgehende Gerade die Stelle einer an einen inneren Kreis gelegten Tangente ein. Man kann also mit Hülfe der Linie der gleichen Tangenten den Grenzpunkt O auch dadurch finden, dass man $PO = PS = Ps$ macht. Ferner kann man auf den Grenzpunkt auch die Gleichung (1), nämlich

$$FT = \frac{2\sqrt{\delta R}}{k}\Delta\varphi$$

anwenden, wenn man darin statt FT und δ resp. FO und CO setzt, dann erhält man (Fig. 10)

$$FO = \frac{2\sqrt{CO.R}}{k}\Delta\varphi,$$

und wenn man diese Gleichungen durch einander dividirt,

$$\frac{FT}{FO} = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{CO}} \text{ oder } \frac{FT}{\sqrt{\delta}} = \frac{FO}{\sqrt{CO}}.$$

Da nun die Lage des Grenzpunktes O nur von dem Werthe von k, nicht aber von der Lage des Punktes F, d. h. von dem Werthe von φ, abhängig ist, so zeigt die zweite Glei-

Digitized by Google

chung, dass, wenn man den kleinen Kreis, also δ variirt, dagegen F festhält, das Verhältniss

$$\frac{FT}{\sqrt{\delta}}$$

constant bleibt. Die erste Gleichung aber zeigt, dass, wenn man einen kleinen Kreis festhält und den Punkt F sich verändern lässt, das Verhältniss

$$\frac{FT}{FO}$$

stets denselben Werth beibehält. Wendet man diesen Satz auf den anderen Endpunkt F' der Sehne FF' an, so folgt

$$\frac{FT}{FO} = \frac{F'T}{F'O},$$

und daraus nach einem bekannten Satze, dass die nach dem Berührungspunkte T gerichtete Gerade OT den Winkel zwischen den Geraden OF und OF' halbirt.

Hiedurch ist nun ein anderes Mittel gegeben, die obige Aufgabe zu lösen, nämlich denjenigen Kreis aus der zu einem gegebenen Werthe von k oder ϑ gehörigen Schaar zu finden, der eine gegebene Sehne FF' berührt. Man construirt (Fig. 10) zuerst auf die oben angegebene Weise den zu dem gegebenen Werthe von k gehörenden Grenzpunkt O, zieht OF und OF' und halbirt den Winkel FOF'. Die Halbirungslinie OT trifft dann die Sehne FF' im Berührungspunkte T, und hat man diesen, so findet man, wie oben, auch den Mittelpunkt c.

§ 44.

Wir kehren jetzt zu der Differentialgleichung (4) zurück:

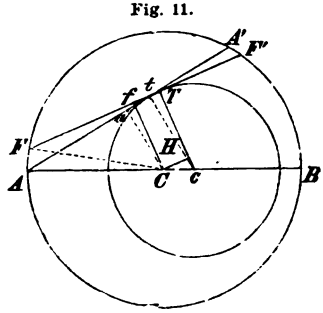
$$\frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} - \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 0,$$

welche für die den Endpunkten F und F' einer beliebigen Sehne zugehörigen Winkel φ und φ' gilt, wenn diese Sehne irgend einen Kreis aus der zu k^2 gehörigen Schaar berührt. Wir suchen Integralgleichungen zu dieser Differentialgleichung, d. h. endliche Beziehungen zwischen den Winkeln φ und φ'. Wenn eine solche die irgend einen inneren Kreis bestimmenden Stücke enthält, so wird sie eine constante Grösse mehr

Digitized by Google

enthalten, als die Differentialgleichung, und daher eine vollständige Integralgleichung sein.

Fig. 11.



Fällen wir aus dem Mittelpunkte C (Fig. 11) eine Senkrechte Cf auf FF', so erhalten wir sogleich zwei Integralgleichungen durch die Relationen

$$\left.\begin{aligned} Ff &= \tfrac{1}{2}(FT + F'T) \\ fT &= \tfrac{1}{2}(FT - F'T) \end{aligned}\right\} \cdot \quad (8)$$

Denn da nach (2) und (3)

$$FT = At \,.\, \Delta\varphi, \quad F'T = At \,.\, \Delta\varphi'$$

ist, so haben wir nur noch Ff und fT auszudrücken. Es ist aber

$$FCF' = 2(\varphi' - \varphi), \text{ also } FCf = \varphi' - \varphi,$$

mithin

$$Ff = R \sin(\varphi' - \varphi), \; Cf = R \cos(\varphi' - \varphi). \cdot \cdot \quad (9)$$

Zieht man ferner cT, und CH senkrecht auf cT, so ist

$$fCA = \varphi' + \varphi, \text{ also } fCc = 180^0 - (\varphi' + \varphi),$$
$$HCc = 90^0 - (\varphi' + \varphi),$$

und daher

$$fT = \delta \sin(\varphi' + \varphi), \quad cH = \delta \cos(\varphi' + \varphi). \cdot \quad (10)$$

Setzt man diese Werthe in (8) hinein, so erhält man

$$R \sin(\varphi' - \varphi) = \tfrac{1}{2} At\,(\Delta\varphi + \Delta\varphi'),$$
$$\delta \sin(\varphi' + \varphi) = \tfrac{1}{2} At\,(\Delta\varphi - \Delta\varphi'),$$

oder

$$\frac{\Delta\varphi + \Delta\varphi'}{\sin(\varphi' - \varphi)} = \frac{2R}{At}; \quad \frac{\Delta\varphi - \Delta\varphi'}{\sin(\varphi' + \varphi)} = \frac{2\delta}{At}. \cdot \cdot \cdot \quad (11)$$

Beides sind vollständige Integralgleichungen mit den willkürlichen Constanten At und $\frac{\delta}{At}$. Um nun diese durch eine auszudrücken, wählen wir dazu, wie es schon früher geschah, denjenigen Werth von φ', welcher dem Werthe $\varphi = 0$ entspricht, diesen bezeichnen wir mit α und können ihn leicht construiren. Wir brauchen nur die aus A an den inneren Kreis gelegte Tangente At zu verlängern, bis sie den äusseren Kreis zum zweiten Male in A' schneidet, dann ist der dem Puncte A' zugehörige Centriwinkel

$$ACA' = 2\alpha,$$

und aus der in den vorigen Paragraphen gelösten Aufgabe

Digitized by Google

erhellt, dass, sobald α gegeben ist, damit auch ein bestimmter Kreis aus der zu k gehörigen Schaar gegeben ist.

Setzt man nun in den Gleichungen (11) $\varphi = 0$ und $\varphi' = \alpha$, so ergiebt sich

$$\frac{2R}{At} = \frac{1 + \Delta\alpha}{\sin\alpha}, \quad \frac{2\delta}{At} = \frac{1 - \Delta\alpha}{\sin\alpha},$$

und daraus

(12) . . . . . $\delta = R\frac{1 - \Delta\alpha}{1 + \Delta\alpha}$.

Zieht man auch noch Ca senkrecht auf At und ausserdem $ct = r$, so folgt, weil $ACa = Act = \alpha$ ist,

(13) . . . $r = (R + \delta)\cos\alpha = \frac{2R\cos\alpha}{1 + \Delta\alpha}$.

Durch die Einführung von α werden nun die Gleichungen (11)

$$\frac{\Delta\varphi + \Delta\varphi'}{\sin(\varphi' - \varphi)} = \frac{1 + \Delta\alpha}{\sin\alpha}; \quad \frac{\Delta\varphi - \Delta\varphi'}{\sin(\varphi' + \varphi)} = \frac{1 - \Delta\alpha}{\sin\alpha}.$$

Aus ihnen folgt durch Addition

$$\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{\Delta\varphi + \Delta\varphi'}{\sin(\varphi' - \varphi)} + \frac{\Delta\varphi - \Delta\varphi'}{\sin(\varphi' + \varphi)}$$
$$= \frac{[\sin(\varphi' + \varphi) + \sin(\varphi' - \varphi)]\,\Delta\varphi + [\sin(\varphi' + \varphi) - \sin(\varphi' - \varphi)]\,\Delta\varphi'}{\sin^2\varphi' - \sin^2\varphi},$$

also

$$\sin\alpha = \frac{\sin^2\varphi' - \sin^2\varphi}{\sin\varphi'\cos\varphi\,\Delta\varphi + \sin\varphi\cos\varphi'\,\Delta\varphi'}.$$

Diese Gleichung ist von der im § 29 umgeformten Gleichung (28) fast nicht verschieden. Wiederholt man hier die dort vollzogenen Operationen, so erhält man

$$\sin\alpha = \frac{\sin\varphi'\cos\varphi\,\Delta\varphi - \sin\varphi\cos\varphi'\,\Delta\varphi'}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi'},$$

und damit unsere bekannte Formel für den Sinus der Amplitude einer Differenz. In der That wird durch gliedweise Integration der Differentialgleichung (4) und durch Einführung von α:

$$\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} - \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^{\alpha}\frac{d\alpha}{\Delta\alpha},$$

also wenn man

$$\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} = u', \quad \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u, \quad \int_0^{\alpha}\frac{d\alpha}{\Delta\alpha} = a$$

setzt,

Digitized by Google

$$a = u' - u,$$

und

$$\varphi' = am\, u', \quad \varphi = am\, u, \quad \alpha = am\, a = am\,(u' - u).$$

Noch eine dritte Integralgleichung, die zugleich direct die Lagrange'sche Formel liefert, erhält man folgendermassen. Es ist

$$r = cT = Cf + cH,$$

und wenn man die Gleichungen (9) und (10) anwendet,

$$r = R\cos(\varphi' - \varphi) + \delta\cos(\varphi' + \varphi). \quad \cdot \quad \cdot \quad (14)$$

Drückt man darin r und δ mittelst (12) und (13) durch α aus, so erhält man

$$\frac{2\cos\alpha}{1+\Delta\alpha} = \cos(\varphi' - \varphi) + \frac{1-\Delta\alpha}{1+\Delta\alpha}\cos(\varphi' + \varphi),$$

oder

$$2\cos\alpha = (1+\Delta\alpha)\cos(\varphi' - \varphi) + (1-\Delta\alpha)\cos(\varphi' + \varphi),$$

mithin

$$\cos\alpha = \cos\varphi'\cos\varphi + \sin\varphi'\sin\varphi\,\Delta\alpha, \quad \cdot \quad \cdot \quad (15)$$

welches die Lagrange'sche Formel ist.

§ 45.

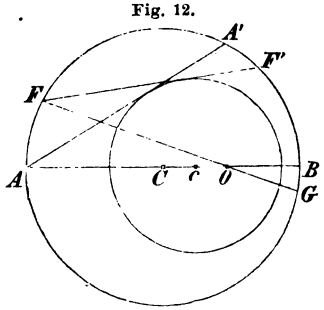
Hiedurch ist nun ein bequemes Mittel gegeben, die Amplitude der Summe oder Differenz zweier Argumente geometrisch zu construiren. Denn zieht man die beiden den inneren Kreis berührenden Sehnen, FF' und AA' (Fig. 12), nimmt den Radius des äusseren Kreises als Längeneinheit an und setzt die Kreisbogen

$$AF = 2\,am\,u, \quad AF' = 2\,am\,u',$$
$$AA' = 2\,am\,a,$$

so ist

$$u' - u = a, \quad u' = u + a.$$

Fig. 12.



Ist also nun zuerst $am\,u$ und $am\,u'$ nebst dem dazu gehörigen Modul k gegeben, so nehme man auf der Peripherie eines Kreises, dessen Radius die Längeneinheit ist, einen beliebigen Punkt A an und mache die von A an nach derselben Richtung gezählten Kreisbögen

$$AF = 2\,am\,u, \quad AF' = 2\,am\,u',$$

ziehe die Sehne FF' und construire nach einer der in den

Digitized by Google

§§ 42 und 43 gelehrten Methoden den zu k gehörigen kleinen Kreis, welcher die Sehne FF' berührt. Legt man dann von A eine Tangente AA' an den nämlichen Kreis, so ist der Bogen

$$AA' = 2am\,a = 2am\,(u' - u).$$

Um ferner die Amplitude der Summe zu construiren, sei ausser dem Modul k, $am\,u$ und $am\,a$ gegeben. Man mache

$$AF = 2am\,u, \quad AA' = 2am\,a,$$

ziehe die Sehne AA' und construire den zu k gehörigen kleinen Kreis, welcher die Sehne AA' berührt. Legt man dann von F an den nämlichen Kreis die Tangente FF'', so ist der Bogen

$$AF'' = 2am\,u' = 2am\,(u + a).$$

In dem besonderen Falle, dass das Argument a dem vollständigen Integral K gleich ist, hat man

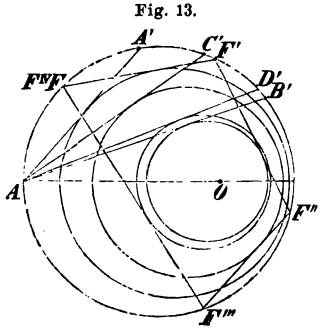
$$am\,K = \frac{\pi}{2}, \quad 2am\,K = \pi.$$

Der Endpunkt A' des Bogens, welcher gleich $2am\,K$ ist, fällt daher nach B, die Sehne AA' wird zum Durchmesser AB, und der denselben berührende, zu k gehörige kleine Kreis schrumpft in den Grenzpunkt O zusammen. Ist daher wieder $AF = 2am\,u$, so ziehe man durch F und O die Gerade FOG, und erhält dann

$$AG = 2am\,(u + K).$$

Hieraus folgt zugleich: Sind zwei Bögen AF und AG so beschaffen, dass die Argumente der diese Bögen darstellenden Amplituden um die Grösse K von einander verschieden sind, so geht die die Endpunkte F und G dieser Bögen verbindende Sehne durch den Grenzpunkt O.

Fig. 13.



Es hat nun keine Schwierigkeit, diese Construction auf mehrere Summanden auszudehnen. Es seien die Bögen (Fig. 13)

$$AF = 2am\,u, \quad AA' = 2am\,a,$$
$$AB' = 2am\,b, \quad AC' = 2am\,c,$$

so findet man zuerst wie vorhin

$$AF' = 2am\,(u + a).$$

Zieht man nun die Sehne AB' und construirt den zu k ge-

Digitized by Google

hörigen, diese Sehne berührenden Kreis, und legt von F' an diesen Kreis die Tangente $F'F''$, so ist

$$AF' = 2am\,(u + a + b).$$

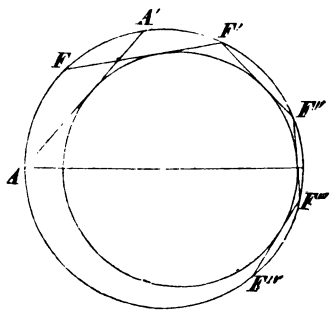
Man ziehe ferner die Sehne AC' und zeichne den dieselbe berührenden, zu k gehörigen Kreis, lege an letzteren aus F'' die Tangente $F''F'''$, so ist

$$AF''' = 2am\,(u + a + b + c);$$

und in derselben Weise kann man fortfahren. Zu bemerken ist aber, dass alle diese Kreisbögen nach derselben Richtung und auch über 360^0 hinaus gezählt werden müssen. Man bemerke ferner, dass die sämmtlichen inneren Kreise nur von a, b, c, etc., nicht aber von u, also auch nicht von der Lage des Punktes F abhängen.

Sind die Argumente a, b, c, etc. alle einander gleich und gleich a, so fallen die Punkte B', C', etc. alle mit dem Punkt A' zusammen (Fig. 14), also fallen auch alle kleinen Kreise mit dem die Sehne AA' berührenden zusammen. Legt man also an diesen Kreis nach und nach die Tangenten FF', $F'F''$, $F''F'''$, $F'''F^{IV}$, etc., so sind die Bögen

Fig. 14.



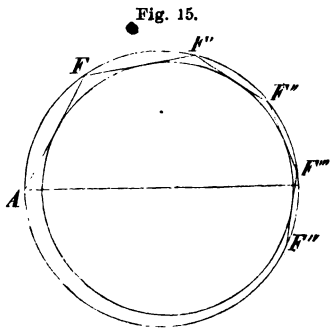
$$AF = 2am\,u, \quad AF' = 2am\,(u+a), \quad AF'' = 2am\,(u+2a),$$
$$AF''' = 2am\,(u+3a), \quad AF^{IV} = 2am\,(u+4a), \text{ etc.}$$

Ist endlich auch $a = u$, so fällt der Punkt A' nach F, der innere Kreis muss daher dann die Sehne AF berühren, und zieht man die Tangenten wie vorhin, so ist nun (Fig. 15)

$$AF = 2am\,u, \quad AF' = 2am\,2u,$$
$$AF'' = 2am\,3u,$$
$$AF''' = 2am\,4u, \quad AF^{IV} = 2am\,4u,$$

etc., wodurch eine geometrische Construction für die Vervielfachung der elliptischen Functionen gegeben ist.

Fig. 15.



Digitized by Google

§ 46.

Kehren wir noch einmal zur Fig. 13 zurück. Im § 45 ist gezeigt worden, dass, wenn man die Bögen

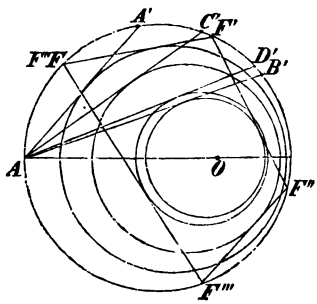
$AF = 2am\,u$, $AA' = 2am\,a$, $AB' = 2am\,b$, $AC' = 2am\,c$

macht und die Sehnen FF', $F'F''$, $F''F'''$ in der angegebenen Weise construirt, die Bögen

$$AF' = 2am\,(u + a), \quad AF'' = 2am\,(u + a + b),$$
$$AF''' = 2am\,(u + a + b + c)$$

sind. Jene Sehnen bilden einen Theil eines in den äusseren Kreis eingeschriebenen Vielecks. Schliesst man nun das Vieleck, welches in unserer Figur ein Viereck ist, durch Ziehen der Sehne $F'''F^{IV}$, wo wir also den Punkt F^{IV} mit F zusammenfallend annehmen, so wird es auch einen zum Modul k gehörigen Kreis geben, der diese Sehne berührt, weil man zu jeder beliebigen Sehne einen solchen Kreis nach § 42 oder 43 finden kann. Um aber diesen Kreis unabhängig von der Sehne $F'''F^{IV}$ finden zu können, legen wir an ihn von A aus die Tangente AD' und setzen

Fig. 13.



$$\text{Bogen } AD' = 2am\,d,$$

dann ist der über 360° hinaus gezählte Bogen

$$AF^{IV} = 2am\,(u + a + b + c + d).$$

Da nun aber der Punct F^{IV} mit F zusammenfällt, so ist

$$AF^{IV} = 2\pi + AF,$$

also

$$2am\,(u + a + b + c + d) = 2\pi + 2am\,u,$$

oder

$am\,(u + a + b + c + d) = \pi + am\,u = am\,(u + 2K)$ (§ 7),

folglich

$$a + b + c + d = 2K.$$

Bestimmt man also $AD' = 2am\,d$ so, dass

$$d = 2K - (a + b + c),$$

Digitized by Google

so wird der die Sehne AD' berührende Kreis so liegen, dass die aus F'''' an ihn gezogene Tangente durch den Punct F hindurchgeht.

Es ist ersichtlich, dass die hier für ein Viereck ausgeführte Betrachtung sich ohne Weiteres auf ein Vieleck von beliebig vielen, n, Seiten ausdehnen lässt. Bezeichnen wir die Ecken desselben mit

$$F,\ F',\ F''.....F^{(n)},$$

wo der letzte Punkt $F^{(n)}$ mit dem ersten F zusammenfallend gedacht werde, so kann auch der Fall eintreten, dass dieses Zusammenfallen nicht nach einmaligem Umlaufe um die Peripherie eintritt, sondern erst etwa nach m Umläufen. Dann ändert sich im Vorigen nur das, dass an die Stelle der Gleichung $a + b + c + d = 2K$ die folgende

$$a + b + c + d + \cdots\cdots = 2mK$$

tritt. Wichtig aber ist, daran zu erinnern, dass die Argumente a, b, c, etc. und auch das letzte derselben, durch welches derjenige Kreis bestimmt wird, der die das Vieleck schliessende n^{te} Seite desselben berührt, von u und also auch von der Lage des ersten Eckpunktes F ganz unabhängig ist. Dieser letzte Kreis bleibt also mit den übrigen Kreisen unverändert derselbe, wenn der Punkt F und mit ihm die Punkte F', F'', etc. ihre Lage auf der Peripherie des äusseren Kreises ändern.

Nach alledem erhält man nun folgenden Satz:

Hat man eine Schaar ineinanderliegender Kreise, welche alle eine gemeinschaftliche Linie der gleichen Tangenten besitzen, und bewegen sich die Ecken eines n-Ecks auf der Peripherie des äussersten Kreises, während die $(n-1)$ ersten Seiten desselben sich jede auf einem Kreise aus der genannten Schaar wälzen, so wälzt sich auch die n^{te} Seite auf einem Kreise aus dieser Schaar.

Besonders wichtig ist nun der Fall, wenn die Argumente a, b, c, etc. alle einander gleich sind, dann fallen die Sehnen AA', AB', AC', AD', etc. alle in eine zusammen, also auch die diese Sehnen berührenden Kreise, und das Vieleck

Digitized by Google

ist dann dem äusseren Kreise eingeschrieben und zugleich dem inneren Kreise umgeschrieben (Fig. 16). Setzt man in diesem Falle

$$b = c = d = \cdots = a,$$

und nennt die Anzahl der vorhandenen Argumente n, so dass dies auch die Anzahl der Seiten ist, so geht die Gleichung

$$a + b + c + \cdots = 2K$$

über in

$$na = 2K,$$

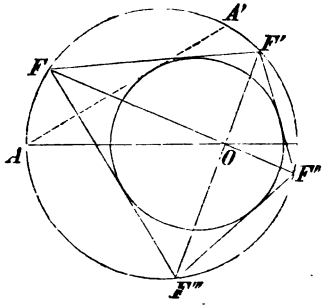
aus welcher

$$a = \frac{2K}{n}$$

folgt. Der Bogen AA', dessen Sehne den inneren Kreis berührt, ist also

$$\text{Bogen } AA' = 2am\frac{2K}{n}.$$

Fig. 16.



Hiedurch ist nun ganz allgemein die Aufgabe gelöst, zu einem gegebenen Kreise einen zweiten Kreis zu finden von der Beschaffenheit, dass man um ihn ein Vieleck von einer gegebenen Anzahl von Seiten beschreiben kann, dessen Ecken zugleich in der Peripherie des ersten Kreises liegen.

Ist nämlich n die Anzahl der Seiten des Vielecks, so nehme man einen beliebigen Werth für k an und berechne den Werth von $am\frac{2K}{n}$ *). Man mache dann den von einem beliebigen Punkte A der Peripherie des äusseren Kreises, dessen Radius als Längeneinheit angenommen werde, gezählten Bogen $AA' = 2am\frac{2K}{n}$, ziehe die Sehne AA' und construire den dieselbe berührenden, zu k gehörigen Kreis, so hat der letztere die verlangte Eigenschaft.

Da der Werth des Moduls k beliebig angenommen werden kann, so ist die Aufgabe eine unbestimmte, und es giebt unendlich viele Auflösungen derselben. Für den besonderen

*) Ueber die Berechnung von K aus k, sowie der Amplitude zu einem gegebenen Argument siehe unten § 50.

Digitized by Google

Fall, dass man $k = 0$ setzt, wird $am \frac{2K}{n} = \frac{2K}{n}$, und da dann $K = \frac{\pi}{2}$ ist, Bogen $AA' = 2\frac{2\pi}{n2} = \frac{2\pi}{n}$. Die Linie der gleichen Tangenten rückt dann ins Unendliche, der innere Kreis wird mit dem äusseren concentrisch, und daher das n-Eck ein regelmässiges.

Der Werth des Bogens AA', von welchem die Lösung der Aufgabe abhängt, ist von dem Werthe von u, d. h. von der Lage des Punktes F, ganz unabhängig. Hat man daher zwei Kreise gefunden, welche der Aufgabe genügen, so kann man von einem beliebigen Punkte der Peripherie des äusseren Kreises das n-Eck zu zeichnen beginnen, es wird sich stets schliessen.

Unter den Vielecken, welche einem Kreise um- und einem anderen Kreise eingeschrieben sind, besitzen diejenigen, deren Seitenzahl eine gerade Zahl ist, noch eine merkwürdige Eigenschaft. Setzt man nämlich

$$n = 2m,$$

so wird

$$a = \frac{2K}{n} = \frac{K}{m}.$$

Bezeichnet man nun die Ecken des $2m$-Ecks mit

$$F,\ F',\ F'',\ \ldots\ldots\ F^{(2m)},$$

so sind die Eckenpaare

$$FF^{(m)},\ F'F^{(m+1)},\ \text{etc.}$$

gegenüberstehende Ecken. Ferner ist

$AF = 2am\,u$, $AF' = 2am\,(u+a)$, $AF'' = 2am\,(u+2a)$ $\ldots\ldots AF^{(m)} = 2am\,(u+ma)$, $AF^{(m+1)} = 2am\,[u+(m+1)a]$, etc.

Also sind die Bögen, deren Endpunkte die beiden gegenüberstehenden Ecken F und $F^{(m)}$ sind, wenn man den Werth von a einsetzt,

$$AF = 2am\,u,\quad AF^{(m)} = 2am\,(u+K).$$

Die Argumente der Amplituden haben also K zum Unterschiede, folglich geht nach § 45 die Sehne oder Diagonale $FF^{(m)}$ durch den Grenzpunkt O. Für das folgende Paar gegenüberstehender Ecken F' und $F^{(m+1)}$ ist

$$AF' = 2am\left(u+\frac{K}{m}\right),\quad AF^{(m+1)} = 2am\left(u+\frac{K}{m}+K\right).$$

Digitized by Google

Der Unterschied der Argumente ist also wieder gleich K, folglich geht auch die Diagonale $F'F^{(m+1)}$ durch den Grenzpunkt. Dasselbe findet bei allen folgenden Paaren gegenüberstehender Ecken statt. Da nun der Grenzpunkt nur von k abhängig, von u aber unabhängig ist, so hat man folgenden Satz:

Bei einem Vieleck von einer geraden Anzahl von Seiten, welches einem Kreise eingeschrieben und einem andern Kreise umschrieben ist, schneiden sich die Diagonalen, welche je zwei gegenüberstehende Ecken verbinden, in ein und demselben Punkte, und dieser bleibt unverändert, wenn das Vieleck sich dreht, d. h. wenn seine Ecken auf der Peripherie des äusseren Kreises fortgleiten, während seine Seiten sich auf dem inneren Kreise wälzen.

§ 47.

Es bleibt nun noch übrig, für einige specielle Annahmen von n, der Anzahl der Seiten des Vielecks, die Relationen zwischen den Radien R, r der beiden Kreise und der Distanz δ ihrer Mittelpunkte zu finden, welche stattfinden müssen, damit man das n-Eck dem einen Kreise um- und dem andern Kreise einschreiben könne. Dazu führen die Formeln (12) und (13) des § 44, aus welchen

$$(17) \quad \cdots \quad \frac{r}{R+\delta} = \cos\alpha, \quad \frac{R-\delta}{R+\delta} = \Delta\alpha$$

folgt, und in welchen $\alpha = am\, a$ war. Da nun

$$a = \frac{2K}{n}$$

zu setzen ist, so hat man

$$\frac{r}{R+\delta} = \cos am\frac{2K}{n}, \quad \frac{R-\delta}{R+\delta} = \Delta am\frac{2K}{n}.$$

Diese beiden Gleichungen sind so lange von einander unabhängig, als man für den Modul k nicht den bestimmten, früher gegebenen Ausdruck durch R, r und δ annimmt. Eliminirt man also k aus ihnen, so wird man die gesuchten Relationen erhalten. Es wird daher darauf ankommen, für

Digitized by Google

jede specielle Annahme von n eine Beziehung zwischen $\cos am \frac{2K}{n}$ und $\Delta am \frac{2K}{n}$ zu finden.

Es sei zuerst $n = 3$, das Vieleck also ein Dreieck,

$$a = \tfrac{2}{3}K.$$

Wir benutzen nun die Lagrange'sche Gleichung (15) § 44

$$\cos\alpha = \cos\varphi' \cos\varphi + \sin\varphi' \sin\varphi \Delta\alpha, \quad \cdot \cdot \quad (18)$$

in welcher $\alpha = am\, a$, $\varphi = am\, u$, $\varphi' = am\,(u + a)$ ist, und setzen

$$\alpha = am \frac{2K}{3}, \quad \varphi = am \frac{2K}{3}, \quad \text{also } \varphi' = am \frac{4K}{3}.$$

Dann ist

$$\cos am \tfrac{2}{3}K = \cos am \tfrac{4}{3}K \cos am \tfrac{2}{3}K + \sin am \tfrac{4}{3}K \sin am \tfrac{2}{3}K \Delta am \tfrac{2}{3}K.$$

Nun ist aber

$$\tfrac{4}{3}K = 2K - \tfrac{2}{3}K,$$

und allgemein

$$\sin am\,(2K - u) = \sin am\, u, \quad \cos am\,(2K - u) = -\cos am\, u,$$
$$\Delta am\,(2K - u) = \Delta am\, u,$$

also erhält man

$$\cos am \tfrac{2}{3}K = -\cos^2 am \tfrac{2}{3}K + \sin^2 am \tfrac{2}{3}K \Delta am \tfrac{2}{3}K$$
$$= -\cos^2 am \tfrac{2}{3}K + (1 - \cos^2 am \tfrac{2}{3}K) \Delta am \tfrac{2}{3}K,$$

oder

$$0 = (1 + \cos am \tfrac{2}{3}K)\,[-\cos am \tfrac{2}{3}K + (1 - \cos am \tfrac{2}{3}K) \Delta am \tfrac{2}{3}K);$$

mithin, da $\cos am \frac{2}{3}K$ von -1 verschieden, und daher $1 + \cos am \frac{2}{3}K$ nicht gleich 0 ist,

$$\cos am \tfrac{2}{3}K + \frac{\cos am \frac{2}{3}K}{\Delta am \frac{2}{3}K} = 1.$$

Setzt man nun die Werthe aus (17) ein, nach denen auch

$$\frac{\cos\alpha}{\Delta\alpha} = \frac{r}{R - \delta}$$

ist, so erhält man die Relation für das Dreieck:

$$\frac{r}{R + \delta} + \frac{r}{R - \delta} = 1,$$

welche von *Euler* zuerst aufgestellt worden ist.

Es sei zweitens $n = 4$,

$$a = \frac{2K}{4} = \tfrac{1}{2}K.$$

Digitized by Google

Dann ist

$$\frac{r}{R+\delta} = \cos am \tfrac{1}{2}K, \quad \frac{r}{R-\delta} = \frac{\cos am \frac{1}{2}K}{\Delta am \frac{1}{2}K}.$$

Erinnert man sich aber der Formel

$$\frac{\cos am\, u}{\Delta am\, u} = \sin am\,(K-u),$$

so folgt

$$\frac{r}{R+\delta} = \cos am \tfrac{1}{2}K, \frac{r}{R-\delta} = \sin am(K - \tfrac{1}{2}K) = \sin am \tfrac{1}{2}K;$$

mithin erhält man, wenn man diese Gleichungen quadrirt und addirt, die Relation für das Viereck:

$$\left(\frac{r}{R+\delta}\right)^2 + \left(\frac{r}{R-\delta}\right)^2 = 1.$$

Zuletzt wollen wir noch die Relation für das Fünfeck suchen, also

$$a = \tfrac{2}{5}K$$

annehmen. Hier benutzen wir zuerst wieder die Gleichung (18), indem wir

$$\alpha = am \tfrac{2}{5}K, \quad \varphi = am \tfrac{2}{5}K, \quad \varphi' = am \tfrac{4}{5}K$$

setzen, und erhalten

$$(19) \quad \begin{cases} \cos am \frac{2}{5}K = \cos am \frac{4}{5}K \cos am \frac{2}{5}K \\ \quad + \sin am \frac{4}{5}K \sin am \frac{2}{5}K \Delta am \frac{2}{5}K. \end{cases}$$

Setzt man aber in der Lagrange'schen Gleichung für die Summe (§ 28, S. 110)

$$\cos\sigma = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \Delta\sigma,$$

in welcher

$$\varphi = am\, u, \quad \psi = am\, v, \quad \sigma = am\,(u+v)$$

ist,

$$u = \tfrac{4}{5}K, \quad v = \tfrac{4}{5}K, \quad u + v = \tfrac{8}{5}K,$$

so erhält man

$$\cos am \tfrac{8}{5}K = \cos^2 am \tfrac{4}{5}K - \sin^2 am \tfrac{4}{5}K \Delta am \tfrac{8}{5}K.$$

Nun ist aber

$$\tfrac{8}{5}K = 2K - \tfrac{2}{5}K,$$

also ist auch

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
-\cos am\tfrac{2}{5}K &= \cos^2 am\tfrac{4}{5}K - \sin^2 am\tfrac{4}{5}K\,\Delta\, am\tfrac{2}{5}K \\
&= 1 - \sin^2 am\tfrac{4}{5}K\,(1 + \Delta\, am\tfrac{2}{5}K) \\
&= \cos^2 am\tfrac{4}{5}K\,(1 + \Delta\, am\tfrac{2}{5}K) - \Delta\, am\tfrac{2}{5}K,
\end{aligned}
$$

und daraus ergiebt sich

$$\sin am\tfrac{4}{5}K = \sqrt{\frac{1 + \cos am\frac{2}{5}K}{1 + \Delta\, am\frac{2}{5}K}},$$

$$\cos am\tfrac{4}{5}K = \sqrt{\frac{\Delta\, am\frac{2}{5}K - \cos am\frac{2}{5}K}{1 + \Delta\, am\frac{2}{5}K}}.$$

Substituirt man dies in (19), so kommt

$$
\begin{aligned}
\cos am\tfrac{2}{5}K = \cos am\tfrac{2}{5}K \sqrt{\frac{\Delta\, am\frac{2}{5}K - \cos am\frac{2}{5}K}{1 + \Delta\, am\frac{2}{5}K}} \\
+ \sin am\tfrac{2}{5}K\,\Delta\, am\tfrac{2}{5}K \sqrt{\frac{1 + \cos am\frac{2}{5}K}{1 + \Delta\, am\frac{2}{5}K}}.
\end{aligned}
$$

Setzt man darin der Kürze wegen $am\frac{2}{5}K = \alpha$ und drückt den Sinus durch den Cosinus aus, so erhält man zunächst die gesuchte Relation zwischen $\cos\alpha$ und $\Delta\alpha$:

$$\cos\alpha = \cos\alpha \sqrt{\frac{\Delta\alpha - \cos\alpha}{1 + \Delta\alpha}} + \Delta\alpha\,(1 + \cos\alpha) \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \Delta\alpha}}.$$

Substituirt man darin jetzt die Werthe (17), so wird

$$\frac{\Delta\alpha - \cos\alpha}{1 + \Delta\alpha} = \frac{R - \delta - r}{2R}; \quad \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \Delta\alpha} = \frac{R + \delta - r}{2R},$$

also

$$\frac{r}{R + \delta} = \frac{r}{R + \delta} \sqrt{\frac{R - \delta - r}{2R}} + \frac{R - \delta}{R + \delta} \cdot \frac{R + \delta + r}{R + \delta} \sqrt{\frac{R + \delta - r}{2R}}$$

oder

$$
\begin{aligned}
r\,(R + \delta)\sqrt{2R} = r\,(R + \delta)\sqrt{R - \delta - r} \\
+ (R - \delta)\,(R + \delta + r)\sqrt{R + \delta - r}\ *).
\end{aligned}
$$

*) Vgl. *Richelot*, Ueber die Anwendung einiger Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen auf ein bekanntes Problem der Geometrie. Crelle's Journ. Bd. 38.

Digitized by Google

Elfter Abschnitt.

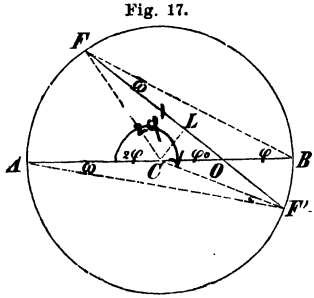
Die Landen'sche Transformation.

§ 48.

Wir knüpfen noch an die im Vorigen angestellte geometrische Betrachtung an und fassen den Grenzpunkt O näher in's Auge, indem wir auch den Winkel einführen, welchen eine vom Grenzpunkte O nach einem beliebigen Punkte F der Peripherie des äusseren Kreises gerichtete Gerade mit dem durch den Grenzpunkt gehenden Durchmesser bildet (Fig 17).

Es sei wie früher $ACF = 2\varphi$, also $ABF = \varphi$. Wir bezeichnen nun mit φ_0 den eben erwähnten, neu einzuführenden Winkel, setzen also

Fig. 17.



$$AOF = \varphi_0.$$

Ist k der Modul, von welchem die Lage des Grenzpunktes O abhängt, und R der Radius des Kreises, so haben wir § 43 gefunden

$$CO = R\frac{1-k'}{1+k'},$$

und wenn man

(1) . . . . . $\frac{1-k'}{1+k'} = k_0$

setzt,

$$CO = Rk_0.$$

Man kann nun sogleich eine Beziehung zwischen den Winkeln φ und φ_0 finden, nämlich im Dreieck COF hat man

$$CF : CO = \sin COF : \sin CFO,$$

das heisst

$$R : Rk_0 = \sin \varphi_0 : \sin (2\varphi - \varphi_0);$$

also ist

(2) . . . . $\sin (2\varphi - \varphi_0) = k_0 \sin \varphi_0.$

Ferner können wir auch eine Differentialgleichung zwischen φ und φ_0 herstellen. Da nämlich der Grenzpunkt die Stelle eines der kleinen Kreise im § 41 vertritt, so vertritt FO die

Digitized by Google

Stelle einer Tangente FT an den kleinen Kreis. Bezeichnet man nun mit F' den Punkt, in welchem die Gerade FO den äusseren Kreis zum zweiten Male schneidet, und setzt man den in derselben Richtung von CA aus gezählten Centriwinkel $ACF' = 2\varphi'$, so vertritt auch $F'O$ die Stelle der Tangente $F'T$. Wir haben aber § 41 die Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{FT}{F'T}$$

gefunden. Setzt man also $FO = p$ und $F'O = p'$, so ist

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{p}{p'}.$$

Nun ist aber $BCF' = 2\varphi' - \pi$, folglich, $BAF' = BFF' = \omega$ gesetzt,

$$\omega = \varphi' - \frac{\pi}{2},$$

also auch

$$d\omega = d\varphi' \quad \text{und} \quad \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{p'}{p},$$

und da $\varphi_0 = \omega + \varphi$, also $d\varphi_0 = d\omega + d\varphi$ ist,

$$\frac{d\varphi_0}{d\varphi} = \frac{p + p'}{p} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

Nun ist nach § 41, weil FO die Stelle der Tangente FT, und AO die Stelle der Tangente At vertritt,

$$FO = p = AO \cdot \Delta(\varphi, k),$$

oder

$$p = R(1 + k_0)\,\Delta(\varphi, k) \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

Zieht man ferner CL senkrecht auf FO, so ist

$$OL = \tfrac{1}{2}(p - p') = Rk_0 \cos\varphi_0,$$

also

$$p - p' = 2Rk_0 \cos\varphi_0.$$

Alsdann hat man

$$AO \cdot BO = FO \cdot F'O,$$

oder

$$pp' = R(1 + k_0)\,R(1 - k_0) = R^2(1 - k_0^2).$$

Mithin erhält man auch

$$\begin{aligned} p + p' &= \sqrt{4R^2 k_0^2 \cos^2\varphi_0 + 4R^2(1 - k_0^2)} \quad \cdots \quad (5) \\ &= 2R\sqrt{1 - k_0^2 \sin^2\varphi_0} \\ &= 2R\,\Delta(\varphi_0, k_0). \end{aligned}$$

Digitized by Google

Setzt man daher die Werthe von p und $p + p'$ aus (4) und (5) in (3) hinein, so ergiebt sich

$$(6) \quad \cdots \cdots \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \frac{1 + k_0}{2} \cdot \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, k_0)}.$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung zwischen φ und φ_0. Von dieser ist allerdings die Gleichung (2) eine Integralgleichung, aber keine vollständige, weil sie keine Constante mehr enthält, als die Differentialgleichung. Wir werden diese Gleichungen auch nicht unter diesem Gesichtspunkte betrachten; wir integriren vielmehr beide Seiten der Gleichung (6) und erhalten, da die Gleichung (2), ebenso wie auch Fig. 17 zeigt, dass φ und φ_0 gleichzeitig Null werden,

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \frac{1 + k_0}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, k_0)}.$$

Hienach hat das elliptische Integral der ersten Gattung die bemerkenswerthe und folgenschwere Eigenschaft, dass es sich durch eine passende Substitution in ein anderes verwandeln lässt, welches genau dieselbe Form hat, in welchem aber der Modul einen andern Werth besitzt; nämlich bestimmt man k_0 und φ_0 aus den Gleichungen

$$(7) \quad \cdots \quad k_0 = \frac{1 - k'}{1 + k'} \text{ und } \sin(2\varphi - \varphi_0) = k_0 \sin \varphi_0,$$

so ist

$$(8) \quad \cdots \cdots \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \frac{1 + k_0}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, k_0)}.$$

Man nennt diesen Satz die *Landen'*sche Transformation nach dem Engländer *John Landen*, welcher seine Arbeiten hierüber in den *Philosophical Transactions* von den Jahren 1771 und 1775 (auch in den *Mathematical Memoirs* 1780, pag. 23) niedergelegt hat*).

§ 49.

Die Gleichung (7) ist sehr zweckmässig zur Berechnung des Winkels φ aus dem Winkel φ_0, nicht aber umgekehrt;

*) Vgl. über die geometrische Ableitung der Landen'schen Transformation:

Jacobi, Extrait d'une lettre à M. Hermite. Crelle's Journ. Bd. 32.

Küpper, Démonstration géométrique etc. Crelle's Journ. Bd. 55.

Digitized by Google

wir suchen daher zunächst noch andere Relationen zwischen φ und φ_0 auf. Setzt man

$$2\varphi - \varphi_0 = \varphi - (\varphi_0 - \varphi), \quad \varphi_0 = \varphi + (\varphi_0 - \varphi),$$

so erhält man aus (7)

$$\sin\varphi\cos(\varphi_0 - \varphi) - \cos\varphi\sin(\varphi_0 - \varphi) = k_0\sin\varphi\cos(\varphi_0 - \varphi) + k_0\cos\varphi\sin(\varphi_0 - \varphi)$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}(\varphi_0 - \varphi) = k_0\operatorname{tg}\varphi + k_0\operatorname{tg}(\varphi_0 - \varphi),$$

also

$$\operatorname{tg}(\varphi_0 - \varphi) = \frac{1 - k_0}{1 + k_0}\operatorname{tg}\varphi,$$

oder da

$$\frac{1 - k_0}{1 + k_0} = k'$$

ist,

$$\operatorname{tg}(\varphi_0 - \varphi) = k'\operatorname{tg}\varphi. \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Diese Gleichung macht die Berechnung von φ_0 aus φ sehr leicht. Um auch φ_0 durch φ allein ausgedrückt zu erhalten, löse man die Tangente der Differenz in der vorigen Gleichung auf, so erhält man:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_0 - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi_0\operatorname{tg}\varphi} = k'\operatorname{tg}\varphi,$$

und daraus

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{(1 + k')\operatorname{tg}\varphi}{1 - k'\operatorname{tg}^2\varphi}. \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Eine weitere Gleichung liefert die Betrachtung des Dreiecks FOB. In diesem ist (Fig. 17)

$$OB : FO = \sin(\varphi_0 - \varphi) : \sin\varphi$$

oder mit Rücksicht auf (4)

$$R(1 - k_0) : R(1 + k_0)\,\Delta(\varphi, k) = \sin(\varphi_0 - \varphi) : \sin\varphi,$$

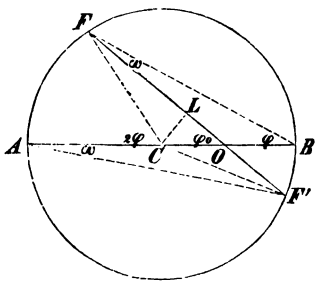
woraus

$$\sin(\varphi_0 - \varphi) = \frac{(1 - k_0)\sin\varphi}{(1 + k_0)\,\Delta(\varphi, k)} = \frac{k'\sin\varphi}{\Delta(\varphi, k)}$$

folgt. Hieraus erhält man sodann

$$\sin\varphi_0\cos\varphi - \cos\varphi_0\sin\varphi = \frac{k'\sin\varphi}{\Delta(\varphi, k)},$$

Fig. 17.



Digitized by Google

und wenn man darin den aus (10) folgenden Werth

$$\cos \varphi_0 = \frac{(1 - k' \operatorname{tg}^2 \varphi) \sin \varphi_0}{(1 + k') \operatorname{tg} \varphi}$$

substituirt,

$$\sin \varphi_0 \cos \varphi - \frac{(1 - k' \operatorname{tg}^2 \varphi) \sin \varphi_0 \cos \varphi}{1 + k'} = \frac{k' \sin \varphi}{\Delta(\varphi, k)}$$

oder

$$\sin \varphi_0 \cos \varphi \,(1 + k' - 1 + k' \operatorname{tg}^2 \varphi) = \frac{k' (1 + k') \sin \varphi}{\Delta(\varphi, k)},$$

also

$$(11) \quad \ldots \quad \sin \varphi_0 = \frac{(1 + k') \sin \varphi \cos \varphi}{\Delta(\varphi, k)}.$$

Der transformirte Modul k_0 ist bedeutend kleiner, als der ursprüngliche k. Um dies zu sehen, bringe man ihn auf folgende Form

$$(12) \quad \ldots \quad k_0 = \frac{1 - k'}{1 + k'} = \frac{1 - k'^2}{(1 + k')^2} = \frac{k^2}{(1 + k')^2}.$$

Diese zeigt nämlich, dass k_0 nicht nur kleiner als k, sondern auch kleiner als k^2 ist. Dieselbe Form dient auch dazu, um k durch k_0 auszudrücken. Da nämlich

$$(13) \quad \ldots \quad 1 + k_0 = \frac{2}{1 + k'}$$

wird, so erhält man

$$(14) \quad \ldots \quad k = \frac{2\sqrt{k_0}}{1 + k_0}.$$

Dem in (8) vorkommenden Ausdruck $1 + k_0$ kann man noch andere Formen geben. Ausser der Relation (13) erhält man sofort aus (14)

$$1 + k_0 = \frac{2\sqrt{k_0}}{k}.$$

Führt man ferner auch das Complement des transformirten Moduls ein, indem man $k_0' = \sqrt{1 - k_0^2}$ setzt, so kann man schreiben

$$k_0' = \sqrt{(1 - k_0)(1 + k_0)} = (1 + k_0) \sqrt{\frac{1 - k_0}{1 + k_0}} = (1 + k_0) \sqrt{k'},$$

mithin

$$1 + k_0 = \frac{k_0'}{\sqrt{k'}};$$

Digitized by Google

da endlich

$$1 + k_0 = \frac{2}{1 + k'}$$

ist, so erhält man auch

$$k_0' = \frac{2\sqrt{k'}}{1 + k'}.$$

Stellen wir nun die in diesem Paragraphen gewonnenen Resultate zusammen, so ist

$$k_0 = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \quad k = \frac{2\sqrt{k_0}}{1 + k_0}; \quad k_0' = \frac{2\sqrt{k'}}{1 + k'}, \quad k' = \frac{1 - k_0}{1 + k_0},$$

$$1 + k_0 = \frac{2}{1 + k'} = \frac{2\sqrt{k_0}}{k} = \frac{k_0'}{\sqrt{k'}},$$

$$\sin(2\varphi - \varphi_0) = k_0 \sin\varphi_0,$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_0 - \varphi) = k' \operatorname{tg}\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{(1 + k')\operatorname{tg}\varphi}{1 - k'\operatorname{tg}^2\varphi},$$

$$\sin\varphi_0 = \frac{(1 + k')\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)}.$$

§ 49a.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir zuerst eine directe, die Geometrie nicht zu Hülfe nehmende Ableitung der Landen'schen Transformation einschalten. Diese geht von der Forderung aus, das Integral

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$$

mittelst einer Substitution von der Form

$$x = \frac{\alpha y}{1 + \beta y^2}$$

in das folgende

$$\int_0^y \frac{\alpha\, dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - \lambda^2 y^2)}} \quad \ldots\ldots \text{(I)}$$

zu verwandeln, in welchem der neue Modul λ, ebenso wie der ursprüngliche k, reell, positiv und kleiner als Eins ausfallen soll.

Durch directe Substitution erhält man zunächst

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} = \frac{\alpha(1 - \beta y^2)\, dy}{\sqrt{[1 - (\alpha^2 - 2\beta)y^2 + \beta^2 y^4][1 - (k^2\alpha^2 - 2\beta)y^2 + \beta^2 y^4]}}; \text{(II)}$$

Digitized by Google

soll dies aber in die Form (I) übergehen, so muss der im Zähler befindliche Factor $(1 - \beta y^2)$ gegen den Nenner weggehoben werden können. Bezeichnet man die beiden Factoren vierten Grades im Nenner mit P und Q, indem

$$\text{(III)} \quad \ldots \quad \begin{cases} P = 1 - (\alpha^2 - 2\beta)\, y^2 + \beta^2 y^4 \\ Q = 1 - (k^2\alpha^2 - 2\beta)\, y^2 + \beta^2 y^4 \end{cases}$$

sei, so kann das Fortheben auf drei Arten erfolgen: 1) wenn $P = (1 - \beta y^2)^2$ wird, oder 2) $Q = (1 - \beta y^2)^2$, oder 3) wenn $1 - \beta y^2$ sowohl in P als auch in Q als Factor enthalten ist.

Den dritten Fall können wir sogleich ausser Betracht lassen, denn wenn $1 - \beta y^2$ gleichzeitig in P und in Q aufgeht, so ist es auch in $P - Q$ als Factor enthalten; aus (III) aber folgt

$$P - Q = -(1 - k^2)\, \alpha^2 y^2,$$

und dieser Ausdruck zeigt, dass es nicht möglich ist, den Constanten α und β solche von Null verschiedene Werthe zuzuertheilen, dass darin $1 - \beta y^2$ als Factor enthalten sei.

Untersuchen wir daher die Annahme

$$P = (1 - \beta y^2)^2$$

oder

$$1 - (\alpha^2 - 2\beta)\, y^2 + \beta^2 y^4 = 1 - 2\beta y^2 + \beta^2 y^4;$$

diese giebt $\alpha^2 - 2\beta = 2\beta$ oder

$$\alpha^2 = 4\beta.$$

Die rechte Seite von (II) geht dann in

$$\frac{\alpha\, dy}{\sqrt{1 - (k^2\alpha^2 - 2\beta)\, y^2 + \beta^2 y^4}}$$

über, und da dies gemäss (I) gleich

$$\frac{\alpha\, dy}{\sqrt{(1 - y^2)\,(1 - \lambda^2 y^2)}}$$

werden soll, so erhält man ferner

$$k^2\alpha^2 - 2\beta = 1 + \lambda^2, \qquad \beta^2 = \lambda^2.$$

Nimmt man $\beta = \lambda$, so folgt $\alpha^2 = 4\lambda$, und man erhält für λ die quadratische Gleichung

$$4k^2\lambda - 2\lambda = 1 + \lambda^2,$$

aus welcher

$$\lambda = 2k^2 - 1 \pm 2k\sqrt{k^2 - 1}$$

folgt. Wenn aber, wie angenommen wird, $k < 1$ ist, so wird

Digitized by Google

λ imaginär. Dasselbe tritt für $\beta = -\lambda$ ein. Dieser Fall ist also ebenfalls zu verwerfen.

Es bleibt demnach nur noch die Annahme, dass

$$Q = (1 - \beta y^2)^2$$

oder

$$1 - (k^2\alpha^2 - 2\beta)\, y^2 + \beta^2 y^4 = 1 - 2\beta y^2 + \beta^2 y^4$$

sei, zu untersuchen übrig. Diese liefert $k^2\alpha^2 - 2\beta = 2\beta$, oder

$$k^2\alpha^2 = 4\beta, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

und es wird

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\alpha\, dy}{\sqrt{1-(\alpha^2-2\beta)y^2+\beta^2y^4}} = \frac{\alpha\, dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}},$$

demnach hat man ferner

$$\alpha^2 - 2\beta = 1 + \lambda^2, \qquad \beta^2 = \lambda^2.$$

Die Gleichung (IV) zeigt, dass, wofern α reell ausfällt, β positiv ist; da auch λ positiv werden soll, hat man zu setzen

$$\beta = \lambda, \qquad \alpha^2 = \frac{4\lambda}{k^2},$$

und erhält für λ die quadratische Gleichung

$$\frac{4\lambda}{k^2} - 2\lambda = 1 + \lambda^2,$$

aus welcher

$$\lambda = \frac{2 - k^2 + 2\sqrt{1-k^2}}{k^2}$$

folgt, sodass λ hier in der That reell wird, wenn $k < 1$ ist. Durch Einführung von $k'^2 = 1 - k^2$ verwandelt sich der vorige Ausdruck in

$$\lambda = \frac{1 + k'^2 \pm 2k'}{1 - k'^2} = \frac{(1 \pm k')^2}{1 - k'^2} = \frac{1 \pm k'}{1 \mp k'},$$

worin die oberen und die unteren Zeichen einander entsprechen. Soll aber λ ebenfalls kleiner als Eins werden, so muss man die unteren Zeichen wählen und hat dann

$$\lambda = \frac{(1-k')^2}{k^2} = \frac{1-k'}{1+k'}. \quad \ldots\ldots \quad \text{(V)}$$

Dadurch wird weiter $\beta = \lambda$ und

$$\alpha = \frac{2\sqrt{\lambda}}{k} = \frac{2(1-k')}{k^2} = \frac{2}{1+k'};$$

Digitized by Google

weil aber aus (V)

$$k' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

sich ergiebt, so erhält man

$$1 + k' = \frac{2}{1+\lambda},$$

und daher

$$\alpha = 1 + \lambda.$$

Führt man nun noch an Stelle von λ das Zeichen k_0 ein, so wird die gefundene Transformation durch die folgenden Formeln dargestellt:

$$k_0 = \frac{1-k'}{1+k'}, \qquad x = \frac{(1+k_0)\,y}{1+k_0 y^2},$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}} = (1+k_0)\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-k_0^2y^2)}},$$

oder wenn man

$$x = \sin\psi, \qquad y = \sin\psi_0$$

setzt,

$$\text{(VI)} \quad \sin\psi = \frac{(1+k_0)\sin\psi_0}{1+k_0\sin^2\psi_0}, \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k)} = (1+k_0)\int_0^{\psi_0} \frac{d\psi_0}{\Delta(\psi_0, k_0)}.$$

Diese Transformation ist von der in den vorigen §§ behandelten noch verschieden. Man gelangt aber zu der letzteren, wenn man von der schon § 8 benutzten Substitution

$$\sin\psi = i\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

Gebrauch macht, durch welche

$$\frac{d\psi}{\Delta(\psi, k)} = i\,\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k')}$$

wird. Wir wenden diese in der Weise an, dass wir setzen

$$\sin\psi = i\,\mathrm{tg}\,\varphi_0, \qquad \sin\psi_0 = i\,\mathrm{tg}\,\varphi,$$

und erhalten dann aus (VI) unmittelbar

$$\text{(VII)} \quad \mathrm{tg}\,\varphi_0 = \frac{(1+k_0)\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1-k_0\,\mathrm{tg}^2\varphi}; \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, k')} = (1+k_0)\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k_0')}.$$

Betrachtet man nun hierin k_0' als den ursprünglichen Modul

Digitized by Google

und führt für denselben vorübergehend das Zeichen λ ein, aus welchem in analoger Weise auch λ', λ_0, λ_0' mittelst der Formeln

$$\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}, \quad \lambda_0 = \frac{1 - \lambda'}{1 + \lambda'}, \quad \lambda_0' = \sqrt{1 - \lambda_0'^2}$$

abzuleiten sind, so zeigen die am Ende des § 49 zusammengestellten Formeln, dass man gleichzeitig hat

$$k_0' = \lambda, \quad k_0 = \lambda', \quad k' = \lambda_0, \quad k = \lambda_0',$$
$$1 + k_0 = 1 + \lambda' = \frac{2}{1 + \lambda_0}.$$

Demnach folgt aus (VII)

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{(1 + \lambda') \operatorname{tg} \varphi}{1 - \lambda' \operatorname{tg}^2 \varphi}, \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, \lambda_0)} = \frac{2}{1 + \lambda_0} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \lambda)};$$

also, wenn man wieder k statt λ schreibt,

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{(1 + k') \operatorname{tg} \varphi}{1 - k' \operatorname{tg}^2 \varphi}, \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \frac{1 + k_0}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, k_0)},$$

welche Formeln die früher aufgestellte Transformation enthalten. Die übrigen am Ende des § 49 zusammengestellten Beziehungen zwischen φ und φ_0 ergeben sich hieraus sehr leicht durch einfache Umformungen.

§ 50.

Wir haben nun zuzusehen, wie die Winkel φ und φ_0 sich mit einander ändern. Dazu differentiiren wir die Gleichung (10)

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{(1 + k') \operatorname{tg} \varphi}{1 - k' \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

und erhalten

$$\frac{d\varphi_0}{d\varphi} = (1 + k') \frac{1 + k' \operatorname{tg}^2 \varphi}{(1 - k' \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} \cdot \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi},$$

mithin für das Differentialverhältniss $\frac{d\varphi_0}{d\varphi}$ einen Ausdruck, der immer positiv ist. Es wachsen also φ_0 und φ gleichzeitig. Nun wird jedesmal, wenn $\operatorname{tg} \varphi = 0$ ist, auch $\operatorname{tg} \varphi_0 = 0$. Schreibt man ferner die obige Gleichung in der Form

Digitized by Google

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{1 + k'}{\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} - k' \operatorname{tg} \varphi},$$

so zeigt sie, dass auch jedesmal, wenn $\operatorname{tg} \varphi = \infty$ ist, $\operatorname{tg} \varphi_0 = 0$ wird. Lässt man aber φ einen Quadranten, $\operatorname{tg} \varphi$ also alle Werthe von 0 bis ∞ oder von $-\infty$ bis 0 durchlaufen, so wechselt wegen (10) $\operatorname{tg} \varphi_0$ einmal sein Zeichen, nämlich dann, wenn $\operatorname{tg} \varphi$ entweder den Werth $+\sqrt{\frac{1}{k'}}$ oder den Werth $-\sqrt{\frac{1}{k'}}$ überschreitet, folglich durchläuft gleichzeitig φ_0 zwei Quadranten, und den Werthen

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \text{ etc. von } \varphi$$

entsprechen die Werthe

$$0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \text{ etc. von } \varphi_0.$$

Hieraus folgt also, dass φ_0 doppelt so rasch wächst als φ, in der Art, dass jedesmal, wenn φ einem Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ gleich geworden ist, φ_0 demselben Vielfachen von π gleich ist.

Setzen wir nun in der Gleichung (8)

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \frac{1 + k_0}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi_0, k_0)},$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$, so wird $\varphi_0 = \pi$. Bezeichnen wir daher das dem Modul k_0 zugehörige vollständige Integral mit K_0, setzen also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, k_0)} = K_0 \text{ und daher } \int_0^{\pi} \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, k_0)} = 2K_0,$$

so erhalten wir die wichtige Relation

$$(15) \quad \cdots \cdots \quad K = (1 + k_0) K_0.$$

Die vorige Transformation kann man nun so oft, als man will, wiederholen. Bildet man nämlich eine Reihe von Moduln $k_0, k_{00}, k_{(3)} \cdots k_{(n)}$, und eine Reihe von Winkeln $\varphi_0, \varphi_{00}, \varphi_{(3)} \cdots \varphi_{(n)}$ nach den Gleichungen

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
k_0 &= \frac{1-k'}{1+k'}, & \operatorname{tg}(\varphi_0 - \varphi) &= k' \operatorname{tg} \varphi,\\
k_{00} &= \frac{1-k'_0}{1+k'_0}, & \operatorname{tg}(\varphi_{00} - \varphi_0) &= k'_0 \operatorname{tg} \varphi_0,\\
k_{(3)} &= \frac{1-k'_{00}}{1+k'_{00}}, & \operatorname{tg}(\varphi_{(3)} - \varphi_{00}) &= k'_{00} \operatorname{tg} \varphi_{00},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
k_{(n)} &= \frac{1-k'_{(n-1)}}{1+k'_{(n-1)}}, & \operatorname{tg}(\varphi_{(n)} - \varphi_{(n-1)}) &= k'_{(n-1)} \operatorname{tg} \varphi_{(n-1)},
\end{aligned}\right\} (16)$$

so hat man auch successive

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, k_0)} &= \frac{1+k_{00}}{2} \int_0^{\varphi_{00}} \frac{d\varphi_{00}}{\Delta(\varphi_{00}, k_{00})},\\
\int_0^{\varphi_{00}} \frac{d\varphi_{00}}{\Delta(\varphi_{00}, k_{00})} &= \frac{1+k_{(3)}}{2} \int_0^{\varphi_{(3)}} \frac{d\varphi_{(3)}}{\Delta(\varphi_{(3)}, k_{(3)})},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\int_0^{\varphi_{(n-1)}} \frac{d\varphi_{(n-1)}}{\Delta(\varphi_{(n-1)}, k_{(n-1)})} &= \frac{1+k_{(n)}}{2} \int_0^{\varphi_{(n)}} \frac{d\varphi_{(n)}}{\Delta(\varphi_{(n)}, k_{(n)})}.
\end{aligned}\right\} \cdots (17)$$

Je zwei auf einander folgende Moduln $k_{(n-1)}$ und $k_{(n)}$ stehen dann in derselben Beziehung, wie k und k_0, und ebenso auch je zwei auf einander folgende Winkel $\varphi_{(n-1)}$ und $\varphi_{(n)}$ in derselben Beziehung wie φ und φ_0. Es wächst daher auch $\varphi_{(n)}$ doppelt so rasch als $\varphi_{(n-1)}$, und setzt man $\varphi_{(n-1)} = \frac{\pi}{2}$, so wird $\varphi_{(n)} = \pi$. Bezeichnet man nun die den Moduln $k_0, k_{00}, k_{(3)} \cdots k_{(n)}$ entsprechenden vollständigen Integrale resp. mit $K_0, K_{00}, K_{(3)} \cdots K_{(n)}$, so erhält man auch successive die Relationen

$$\begin{aligned}
K &= (1+k_0)\ K_0,\\
K_0 &= (1+k_{00})\ K_{00},\\
K_{00} &= (1+k_{(3)})\ K_{(3)},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
K_{(n-1)} &= (1+k_{(n)})\ K_{(n)},
\end{aligned}$$

und wenn man alle diese Gleichungen multiplicirt,

$$K = (1+k_0)(1+k_{00})(1+k_{(3)}) \cdots\cdots (1+k_{(n)})\ K_{(n)} \cdots (18)$$

Digitized by Google

Nun war nach (12)

$$k_0 = \frac{k^2}{(1+k')^2},$$

also ist auch

$$k_{(n)} = \frac{k^2_{(n-1)}}{(1+k'_{(n-1)})^2}.$$

Die Moduln k, k_0, k_{00}, u. s. w. bilden daher eine abnehmende Reihe. Je kleiner aber $k_{(n-1)}$ ist, desto mehr nähert sich sein Complement $k'_{(n-1)}$ der Grenze 1, und folglich $1 + k'_{(n-1)}$ der Grenze 2. Je grösser also n ist, oder je weiter man in der Reihe der Moduln fortschreitet, desto mehr nähert sich $k_{(n)}$ dem Werthe $(\frac{1}{2}k_{(n-1)})^2$. Hieraus geht hervor, dass $k_{(n)}$ mit wachsendem n rasch zur Grenze 0 convergirt, und dass

$$\lim k_{(n)} = 0, \quad \lim k'_{(n)} = 1 \text{ (für } n = \infty),$$

und daher

$$\lim K_{(n)} = \frac{\pi}{2}$$

ist. Geht man also in der Gleichung (18) zur Grenze über, so erhält man K ausgedrückt durch das rasch convergirende unendliche Product

$$(19) \cdot\cdot \quad K = \frac{\pi}{2}(1+k_0)(1+k_{00})(1+k_{(3)})\cdots\cdots$$

Diese Gleichung eignet sich nun ganz vortrefflich zur Berechnung von K aus einem gegebenen Modul k. Denn setzt man $k = \sin\theta$, so wird, wie wir schon § 43 sahen, $k_0 = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta$, folglich $1 + k_0 = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta}$. Setzt man nun successive

$$k_0 = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\theta = \sin\theta_0, \quad k_{00} = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\theta_0 = \sin\theta_{00}, \text{ u. s. w.},$$

so wird

$$1 + k_0 = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta}, \quad 1 + k_{00} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta_0}, \quad 1 + k_{(3)} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta_{00}}, \text{ etc.}$$

und daher

$$K = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta \cos^2 \frac{1}{2}\theta_0 \cos^2 \frac{1}{2}\theta_{00} \cdots\cdots}.$$

Digitized by Google

Ist z. B. $k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, also $\theta = 45^0$, so steht die Rechnung so:

$\theta = 45^0\ 0'\ 0'',00$	$\theta_0 = 9^0\ 52'\ 45'',41$	$\theta_{00} = 0^0\ 25'\ 40'',74$
$\frac{1}{2}\theta = 22^0\ 30'\ 0'',00$	$\frac{1}{2}\theta_0 = 4^0\ 56'\ 22'',70$	$\frac{1}{2}\theta_{00} = 0^0\ 12'\ 50'',37$
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta \cdot\cdot\ 9{,}6172243.0$	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_0 \cdot\cdot\ 8{,}9366504.5$	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_{00} \cdot\cdot\ 7{,}5722761.7$
$\cos\frac{1}{2}\theta \cdot\cdot\ 9{,}9656153.0$	$\cos\frac{1}{2}\theta_0 \cdot\cdot\ 9{,}9983840.1$	$\cos\frac{1}{2}\theta_{00} \cdot\cdot\ 9{,}9999970.0$
$\left.\begin{matrix}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta\\ \sin\theta_0\end{matrix}\right\} \cdot\cdot\ 9{,}2344486.0$	$\left.\begin{matrix}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta_0\\ \sin\theta_{00}\end{matrix}\right\} \cdot\cdot\ 7{,}8733009.0$	$\left.\begin{matrix}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta_{00}\\ \sin\theta_{(3)}\end{matrix}\right\} \cdot\ 5{,}1445523.4$

$$\theta_{(3)} = 0^0\ 0'\ 3'', \qquad \cos\tfrac{1}{2}\theta_{(3)} \cdot\cdot\ 0{,}0000000.$$

Es wird also schon $\cos\frac{1}{2}\theta_{(3)}$ bei 7 Decimalstellen der Einheit gleich. Ferner ergiebt sich:

$$\begin{array}{ll}
\cos^2\frac{1}{2}\theta \cdots\cdot & 9{,}9312306.0 \\
\cos^2\frac{1}{2}\theta_0 \cdots & 9{,}9967680.2 \\
\cos^2\frac{1}{2}\theta_{00} \cdot\cdot & 9{,}9999940.0 \\
\hline
\frac{\pi}{2K} \cdots\cdots\cdot & 9{,}9279926.2 \\
\frac{\pi}{2} \cdots\cdots\cdot & 0{,}1961198.7 \\
\hline
K \cdots\cdots\cdot & 0{,}2681272.5
\end{array}$$

$$K = 1{,}8540747.$$

Man sieht aus diesem Beispiele, dass man meistens nur wenige Factoren des unendlichen Products (19) zu berechnen braucht, indem man nur drei derselben bedarf, wenn k den Mittelwerth $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ hat.

In derselben Weise kann man nun auch ein beliebiges elliptisches Integral berechnen. Mit Anwendung der Legendreschen Bezeichnung hat man nämlich aus (17)

$$F(\varphi, k) = \frac{1+k_0}{2}\, F(\varphi_0, k_0),$$

$$F(\varphi_0, k_0) = \frac{1+k_{00}}{2}\, F(\varphi_{00}, k_{00}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(\varphi_{(n-1)}, k_{(n-1)}) = \frac{1+k_{(n)}}{2}\, F(\varphi_{(n)}, k_{(n)}),$$

und erhält daher durch Multiplication aller dieser Gleichungen:

$$F(\varphi, k) = \frac{(1+k_0)(1+k_{00})\cdots\cdots(1+k_{(n)})}{2^n}\, F(\varphi_{(n)}, k_{(n)}).$$

Geht man aber nun zur Grenze für $n = \infty$ über, so ist, weil $\lim k_{(n)} = 0$ ist,

$$\lim F(\varphi_{(n)}, k_{(n)}) = \lim \varphi_{(n)}.$$

Digitized by Google

Setzt man ausserdem für das unendliche Product

$$(1 + k_0)(1 + k_{00}) \cdots$$

seinen aus (19) folgenden Werth $\frac{2K}{\pi}$, so erhält man

$$F(\varphi, k) = \frac{2K}{\pi} \lim \frac{\varphi_{(n)}}{2^n}.$$

Zur successiven Berechnung der Winkel $\varphi_0, \varphi_{00}, \cdots \varphi_{(n)}$ dienen die Gleichungen (16). Dieselben zeigen zugleich, dass, wenn man diese Berechnung so weit fortgesetzt hat, dass innerhalb der angenommenen Näherungsgrenze $k'_{(n-1)}$ von 1 nicht mehr verschieden ist, $\varphi_{(n)} - \varphi_{(n-1)} = \varphi_{(n-1)}$, also $\varphi_{(n)} = 2\varphi_{(n-1)}$ wird. Folglich ist dann auch

$$\frac{\varphi_{(n)}}{2^n} = \frac{2\varphi_{(n-1)}}{2^n} = \frac{\varphi_{(n-1)}}{2^{n-1}}; \quad \frac{\varphi_{(n+1)}}{2^{n+1}} = \frac{2\varphi_{(n)}}{2^{n+1}} = \frac{\varphi_{(n)}}{2^n} = \frac{\varphi_{(n-1)}}{2^{n-1}},$$

u. s. f. Demnach behält von da ab das Verhältniss $\frac{\varphi_{(n)}}{2^n}$ stets denselben Werth, wie gross man auch n nehmen mag, sodass dieses Verhältniss sich wirklich einem Grenzwerthe nähert, den es erreicht, wenn $k'_{(n)} = 1$ geworden ist.

Um auch die Berechnung von $F(\varphi, k)$ an einem Beispiele zu zeigen, wollen wir dem Modul k wieder denselben Werth $\sqrt{\frac{1}{2}}$ wie vorhin geben und $\varphi = 30^0$ annehmen. Dann ergiebt sich aus den früheren Zahlen zunächst

$$\frac{2K}{\pi} \cdots 0{,}0720073.8,$$

ferner

$$\begin{aligned} k' &= \cos\theta \cdots 9{,}8494850.0 \\ k'_0 &= \cos\theta_0 \cdots 9{,}9935118.0 \\ k'_{00} &= \cos\theta_{00} \cdots 9{,}9999878.9 \\ k'_{(3)} &= \cos\theta_{(3)} \cdots 0{,}0000000.0 \end{aligned}$$

sodass für $n = 3$ die Grenze erreicht ist. Die Berechnung der Winkel φ_0, φ_{00}, u. s. w. nach den Gleichungen (16) steht nun so:

$\varphi = 30^0$	$\varphi_0 = 52^0\,12'\,27'',56$	$\varphi_{00} = 104^0\,0'\,0'',14$
$\operatorname{tg}\varphi \cdots 9{,}7614394.0$	$\operatorname{tg}\varphi_0 \cdots 0{,}1104374.9$	$\operatorname{tg}\varphi_{00} \cdots 0{,}6032276.5_n$
$k' \cdots 9{,}8494850.0$	$k'_0 \cdots 9{,}9935118.0$	$k'_{00} \cdots 9{,}9999878.9$
$\operatorname{tg}(\varphi_0 - \varphi) \cdots 9{,}6109244.0$	$\operatorname{tg}(\varphi_{00} - \varphi_0) \cdots 0{,}1039492.9$	$\operatorname{tg}(\varphi_{(3)} - \varphi_{00}) \cdots 0{,}6032155.4_n$
$\varphi_0 - \varphi = 22^0\,12'\,27'',56$	$\varphi_{00} - \varphi_0 = 51^0\,47'\,32'',58$	$\varphi_{(3)} - \varphi_{00} = 104^0\,0'\,1'',40$
$\varphi_0 = 52^0\,11'\,27'',56$	$\varphi_{00} = 104^0\,0'\,0'',14$	$\varphi_{(3)} = 208^0\,0'\,1'',54.$

Digitized by Google

Da nun $k_{(3)} = 1$ ist, so wird schon $\varphi_{(4)} = 2\varphi_{(3)}$, und folglich ist der gesuchte Grenzwerth $\frac{\varphi_{(3)}}{2^3} = \frac{1}{8}$ (208° 0′ 1″,54) = 26° 0′ 0″,19 = 93600″,19. Diesen Winkel muss man zunächst in Längenmass ausdrücken, indem man ihn mit der Zahl 206264,8 dividirt, deren Logarithmus 5,3144251.3 ist. Dann ist

$$\begin{aligned} 93600'',19 \cdots & \; 4,9712767.0 \\ 206264,8 \cdots & \; 5,3144251.3 \\ & \overline{9,6568515.7} \\ \frac{2K}{\pi} \cdots & \; 0,0720073.8 \\ F(\varphi, k) \cdots & \; 9,7288589.5 \end{aligned}$$

$F(\varphi, k) = 0{,}5356221$, für $\varphi = 30^0$ und $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Die vorige Betrachtung führt auch zu einer Methode, um aus einem gegebenen Argument u und einem gegebenen Modul k den Werth von $am\,(u, k)$ zu berechnen. Setzt man nämlich $F(\varphi, k) = u$, so ist $\varphi = am\,(u, k)$. Man berechne daher zuerst aus k den zugehörigen Werth von K und die Reihe der Moduln $k_0, k_{00}, \cdots k_{(n)}$, sowie die ihrer Complemente, $k'_0, k'_{00}, \cdots k'_{(n)}$. Dann findet man zugleich die Zahl n, für welche innerhalb der angenommenen Näherungsgrenze $k'_{(n)} = 1$ ist. Für diesen Werth von n und zugleich auch für jeden grösseren hat man die Gleichung

$$F(\varphi, k) = u = \frac{2K}{\pi} \frac{\varphi_{(n)}}{2^n},$$

aus welcher sich

$$\varphi_{(n)} = 2^n \frac{\pi u}{2K}$$

ergiebt. Alsdann berechne man successive die Winkel $\varphi_{(n-1)}$, $\varphi_{(n-2)} \cdots \varphi_{00}, \varphi_0, \varphi$ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin(2\varphi_{(n-1)} - \varphi_{(n)}) &= k_{(n)} \sin \varphi_{(n)}, \\ \sin(2\varphi_{(n-2)} - \varphi_{(n-1)}) &= k_{(n-1)} \sin \varphi_{(n-1)}, \\ \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ \sin(2\varphi_0 - \varphi_{00}) &= k_{00} \sin \varphi_{00}, \\ \sin(2\varphi - \varphi_0) &= k_0 \sin \varphi_0, \end{aligned}$$

welche durch fortgesetzte Transformation aus der Gleichung (7) entstehen, und gelangt so zuletzt zu φ, welches der gesuchte Werth von $am\,(u, k)$ ist.

Digitized by Google

Diese Vorschrift gilt zunächst nur für den Fall, dass u kleiner als K ist. Im entgegengesetzten Falle kommt man aber eben so leicht an's Ziel, denn da nach § 7 die Gleichungen

$$am\,(2hK \pm v) = h\pi \mp am\,v$$

bestehen, so setze man

$$u = 2hK + v \quad \text{oder} \quad u = 2hK - v,$$

je nachdem das grösste in u enthaltene Vielfache von K ein gerades, $2hK$, oder ein ungerades, $(2h-1)K$, ist. In beiden Fällen ist dann $v < K$, und man kann nach der vorigen Methode $am\,v$ berechnen. Sodann erhält man im ersten Falle

$$am\,u = h\pi + am\,v$$

und im zweiten

$$am\,u = h\pi - am\,v.^*)$$

§ 51.

Die im § 49 gefundenen Relationen

$$k_0 = \frac{1-k'}{1+k'} = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}, \quad k' = \frac{1-k_0}{1+k_0} = \frac{1-\sqrt{1-k_0'^2}}{1+\sqrt{1-k_0'^2}},$$

$$k = \frac{2\sqrt{k_0}}{1+k_0}, \qquad k'_0 = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'},$$

zeigen, dass k_0 zu k in derselben Beziehung steht, wie k' zu k'_0. Bezeichnet man nun mit λ_0, λ', λ'_0 solche Werthe, die aus einem

---

*) Die successive Transformation der elliptischen Integrale rührt von *Lagrange* her, der sie in der Abhandlung: „Sur une nouvelle méthode de calcul intégral pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré. Mémoires de l'académie à Turin. 1784. 1785. Tome II." aufstellte. Die späteren Ausführungen *Legendre*'s finden sich in den Exercises von p. 81 an und im Traité. Chap. XVII. und XIX. Unter den im 3. Bande der Exercises und im zweiten des Traité gegebenen Tafeln mögen folgende namhaft gemacht werden:

Tafel I enthält die Werthe von Log K und Log E.
- II - - - - $F(\varphi, \sqrt{\frac{1}{2}})$ und $E_1(\varphi, \sqrt{\frac{1}{2}})$.
- III - - Logarithmen von k_0, k_{00}, etc. für ein gegebenes k, und von k'_0, k'_{00}, etc. für ein gegebenes k'.
- VIII enthält 1) die Werthe von $F(45^0, k)$ und $E_1(45^0, k)$; 2) die Werthe von K und E.
- IX enthält mit doppeltem Eingange die Werthe von $F(\varphi, k)$ und $E_1(\varphi, k)$.

Digitized by Google

Modul λ ebenso entstehen wie respective k_0, k', k'_0 aus k, und setzt dann

$$k'_0 = \lambda, \text{ so ist } k_0 = \lambda', \; k' = \lambda_0, \; k = \lambda'_0, \quad \cdots \quad (20)$$

denn es ist

$$k_0 = \sqrt{1 - k'^2_0} = \sqrt{1 - \lambda^2} = \lambda'; \; k' = \frac{1 - k_0}{1 + k_0} = \frac{1 - \lambda'}{1 + \lambda'} = \lambda_0;$$

$$k = \frac{2\sqrt{k_0}}{1 + k_0} = \frac{2\sqrt{\lambda'}}{1 + \lambda'} = \lambda'_0.$$

Stellt man daher die Reihen der Moduln und ihrer Complemente auf:

$$\left.\begin{array}{l} k, \; k_0, \; k_{00}, \; \cdots \; k_{(n)} \; \cdots \; \text{Grenze } 0, \\ k', \; k'_0, \; k'_{00}, \; \cdots \; k_{(n)} \; \cdots \; \text{Grenze } 1, \end{array}\right\} \quad \cdots \quad (21)$$

so nimmt die letztere in der Weise zu, dass jedes Glied aus seinem vorhergehenden auf dieselbe Weise entsteht, wie in der ersteren Reihe jedes Glied aus dem ihm folgenden.

Schreibt man nun in der Gleichung (8) für den Augenblick λ statt k, sodass dieselbe heisst

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \lambda)} = \frac{1 + \lambda_0}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, \lambda_0)},$$

und setzt in derselben

$$\lambda = k'_0,$$

also auch nach (20) $\lambda_0 = k'$, so erhält man

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k'_0)} = \frac{1 + k'}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi, k')},$$

oder weil

$$\frac{1 + k'}{2} = \frac{1}{1 + k_0}$$

ist,

$$(1 + k_0) \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k'_0)} = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, k')}.$$

Bezeichnet man nun die den Moduln k', k'_0, k'_{00}, u. s. w. zugehörigen vollständigen Integrale respective mit K', K'_0, K'_{00}, u. s. w., so ist, weil für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_0 = \pi$ wird,

$$(1 + k_0) K'_0 = 2K',$$

Digitized by Google

und da jede zwei auf einander folgende Moduln in der nämlichen Beziehung stehen, auch

$$\begin{aligned}(1+k_{00})\,K'_{00} &= 2K'_0,\\ (1+k_{(3)})\,K'_{(3)} &= 2K'_{00},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (1+k_{(n)})\,K'_{(n)} &= 2K'_{(n-1)}.\end{aligned}$$

Die Multiplication aller dieser Gleichungen liefert

$$(1+k_0)(1+k_{00})\cdots(1+k_{(n)})\,K'_{(n)} = 2^n K'.$$

Lässt man dann n unendlich gross werden, so ist zwar, weil $\lim k'_{(n)} = 1$ ist, $\lim K'_{(n)} = \infty$*), aber für den Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{K'_{(n)}}{2^n}$ ergiebt sich

$$\lim \frac{K'_{(n)}}{2^n} = \frac{K'}{(1+k_0)(1+k_{00})\cdots} = \frac{\pi K'}{2K}.$$

§ 52.

Die beiden Reihen von Moduln (21) können nun auch nach der entgegengesetzten Seite fortgesetzt werden; bildet man nämlich die Moduln $k_1, k_2, k_3 \cdots$; $k'_1, k'_2, k'_3 \cdots$ mittelst der Gleichungen

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}, \quad k_3 = \frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2}, \cdots$$

$$k'_1 = \frac{1-k}{1+k}, \quad k'_2 = \frac{1-k_1}{1+k_1}, \quad k'_3 = \frac{1-k_2}{1+k_2}, \cdots\cdots$$

so erhält man die beiden Reihen

$$k_n, \cdots k_3, k_2, k_1, k, k_0, k_{00}, k_{(3)}, \cdots k_{(n)},$$

$$k'_n, \cdots k'_3, k'_2, k'_1, k', k'_0, k'_{00}, k'_{(3)}, \cdots k'_{(n)},$$

in welchen jede zwei auf einander folgende Glieder in der nämlichen Beziehung stehen, und zwar jede zwei auf einander folgende der unteren Reihe in der umgekehrten Beziehung, wie irgend zwei auf einander folgende der oberen Reihe. Zwischen den vier Grössen k, k_1, k', k'_1 bestehen daher auch die Gleichungen

*) Siehe S. 17.

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{1-k'_1}{1+k'_1}, \quad k'_1 = \frac{1-k}{1+k}, \\ 1+k &= \frac{2}{1+k'_1} = \frac{2\sqrt{k}}{k_1} = \frac{k'}{\sqrt{k'_1}}, \\ k_1 &= \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad k' = \frac{2\sqrt{k'_1}}{1+k'_1}, \\ 1+k'_1 &= \frac{2}{1+k} = \frac{k_1}{\sqrt{k}} = \frac{2\sqrt{k'_1}}{k'}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22)$$

Da nun also $k, k_1, k_2 \cdots k_n$ in derselben Weise fortschreiten, wie $k', k'_0, k'_{00} \cdots k'_{(n)}$, und

$$k', k'_1, k'_2, \cdots k'_n$$

ebenso wie

$$k, k_0, k_{00}, \cdots k_{(n)},$$

so folgt, dass auch

$$\lim k_n = 1 \text{ und } \lim k'_n = 0$$

sein wird, wenn man n unendlich gross werden lässt.

In ähnlicher Weise kann man auch die Reihe der Winkel $\varphi, \varphi_0, \varphi_{00}, \cdots$ nach der entgegengesetzten Seite fortsetzen, indem man die Glieder folgender Reihe:

$$\varphi_n, \cdots \varphi_3, \varphi_2, \varphi_1, \varphi, \varphi_0, \varphi_{00}, \cdots \varphi_{(n)},$$

mittelst der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sin(2\varphi_1 - \varphi) &= k \sin\varphi, \quad \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1) = k'_1 \operatorname{tg}\varphi_1, \\ \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) &= k_1 \sin\varphi_1, \quad \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = k'_2 \operatorname{tg}\varphi_2, \\ &\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

bildet. Da nun die Moduln $k'_1, k'_2, \cdots$ zur Null convergiren, so wird in der Grenze $\varphi_n = \varphi_{n-1}$, während also die Winkel φ_0, φ_{00}, etc. in der Weise zunehmen, dass $\varphi_{(n)}$ immer mehr $= 2\varphi_{(n-1)}$ zu werden strebt, nehmen die Winkel φ_1, φ_2, etc. so ab, dass φ_n immer mehr $= \varphi_{n-1}$ zu werden strebt. Ausserdem aber besteht zwischen φ_1 und φ, und ebenso auch bei allen folgenden Paaren, die nämliche Beziehung, wie zwischen φ und φ_0, so dass auch, wenn $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ist, $\varphi = \pi$ wird. Endlich hat man auch zwischen den Integralen die der Gleichung (8) entsprechende Gleichung

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\Delta(\varphi_1, k_1)} = \frac{1+k}{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)}. \quad \ldots \quad (24)$$

Digitized by Google

Setzt man nun zuerst, wie im vorigen §, k'_1 an die Stelle von k, so tritt k' an die Stelle von k_1, folglich hat man auch

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\Delta(\varphi_1, k')} = \frac{1+k'_1}{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k'_1)}.$$

Bezeichnet man dann die den Moduln $k_1, k_2, \cdots k_n$; $k'_1, k'_2, \cdots k'_n$ zugehörigen Werthe von K mit $K_1, K_2, \cdots K_n$; $K'_1, K'_2, \cdots K'_n$, so erhält man, wenn man $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, also $\varphi = \pi$ setzt,

$$K' = (1 + k'_1) K'_1,$$

und dann ebenso

$$K'_1 = (1 + k'_2) K'_2, \; K'_2 = (1 + k'_3) K'_3, \; \cdots$$
$$K'_{n-1} = (1 + k'_n) K'_n,$$

folglich

$$K' = (1 + k'_1)(1 + k'_2) \cdots (1 + k'_n) K'_n.$$

Nun ist

$$\lim k'_n = 0, \quad \lim K'_n = \frac{\pi}{2},$$

also

$$(25) \quad \lim (1 + k'_1)(1 + k'_2) \cdots (1 + k'_n) = \frac{2K'}{\pi}.$$

Aus (24) folgt ferner, weil

$$\frac{1+k}{2} = \frac{1}{1+k'_1}$$

ist,

$$(26) \quad \cdots \quad (1 + k'_1) \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\Delta(\varphi_1, k_1)} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)}.$$

Mithin ist auch

$$(1+k'_1) K_1 = 2K; \; (1+k'_2) K_2 = 2K_1; \; \cdots (1+k'_n) K_n = 2K_{n-1}.$$

und

$$(27) \quad (1 + k'_1)(1 + k'_2) \cdots (1 + k'_n) K_n = 2^n K.$$

Nun ist

$$\lim k_n = 1, \quad \lim K_n = \infty;$$

dagegen

$$(28) \quad \lim \frac{K_n}{2^n} = \frac{K}{(1 + k'_1)(1 + k'_2) \cdots} = \frac{\pi K}{2K'}.$$

Digitized by Google

Endlich kann man die Gleichung (26) noch benutzen, um durch fortgesetztes Vergrössern des Moduls das elliptische Integral zu berechnen. Da nämlich dann der Modul in der Grenze gleich 1 wird, so hört auch dann das elliptische Integral auf, ein solches zu sein, vielmehr wird für $k = 1$, $\Delta\varphi = \cos\varphi$, mithin

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \tfrac{1}{2} \log \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \log \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Schreibt man nun die Gleichung (26) in der Legendre'schen Bezeichnung und setzt die Transformation fort, so erhält man

$$\begin{aligned} F(\varphi, k) &= (1 + k'_1)\, F(\varphi_1, k_1) \\ F(\varphi_1, k_1) &= (1 + k'_2)\, F(\varphi_2, k_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F(\varphi_{n-1}, k_{n-1}) &= (1 + k'_n)\, F(\varphi_n, k_n), \end{aligned}$$

und daraus durch Multiplication

$$F(\varphi, k) = (1 + k'_1)(1 + k'_2) \cdots (1 + k'_n)\, F(\varphi_n, k_n).$$

Hat man dann die Transformation so weit fortgesetzt, dass innerhalb der angenommenen Näherungsgrenze $k_n = 1$ geworden ist, so ist

$$F(\varphi_n, k_n) = \log \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_n),$$

und daher, mit Berücksichtigung von (25),

$$F(\varphi, k) = \frac{2K'}{\pi} \log \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_n) \quad \cdots \quad (29)$$

Die successive Berechnung des Winkels φ_n geschieht mittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin(2\varphi_1 - \varphi) &= k \sin\varphi \\ \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) &= k_1 \sin\varphi_1, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Um endlich auch die Moduln k_1, k_2, etc. leicht aus k finden zu können, setze man $k = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\eta$, dann wird, weil

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$$

ist,

$$k_1 = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\eta}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\eta} = \sin\eta;$$

man setze dann aufs neue $k_1 = \sin\eta = \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\eta_1$, dann wird $k_2 = \sin\eta_1$, u. s. w.

Digitized by Google

Diese Methode ist besonders dann anwendbar, wenn der gegebene Modul k von 1 wenig verschieden ist, in welchem Falle die frühere Methode eine weitläufigere Rechnung erfordern würde. Um hiefür ein Beispiel zu geben, sei $k = \sin 89^0 \ldots\ldots 9{,}9999338$ und $\varphi = 30^0$. Dann zeigt ein leichter Ueberschlag, dass bis auf 7 Decimalstellen schon $k_1 = 1$ ist. Die Berechnung von φ_1 steht nun so:

$$\begin{aligned}
\sin \varphi \cdots & \; 9{,}6989700 \\
k \cdots & \; 9{,}9999338 \\
\sin (2\varphi_1 - \varphi) \cdots & \; 9{,}6989038 \\
2\varphi_1 - \varphi &= 29^0\, 59'\, 41'',84 \\
2\varphi_1 &= 59 \;\; 59 \;\; 41{,}84 \\
\tfrac{1}{2}\varphi_1 &= 14 \;\; 59 \;\; 55{,}46 \\
45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1 &= 59 \;\; 59 \;\; 55{,}46\,.
\end{aligned}$$

In der Gleichung (29) kommt der natürliche Logarithmus von $\operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\varphi_1)$ vor; um daher den Briggischen Logarithmus einzuführen, muss man mit dem Modul M des Briggischen Logarithmensystems dividiren. Es ist aber

$$M = 0{,}434294481 \ldots\ldots 9{,}6377842.8,$$

und dann

$$F(\varphi, k) = \frac{2K'}{\pi} \cdot \frac{\text{Brigg. Log. } \operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\varphi_n)}{M}.$$

Die Berechnung von K' ist in diesem Falle sehr leicht. Denn da $k' = \cos 89^0 = \sin 1^0 = \sin \theta$ ist, so wird schon $\cos \frac{1}{2}\theta_0 = 1$ und daher

$$\frac{2K'}{\pi} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta} = \frac{1}{\cos^2 30'},$$

$$\frac{2K'}{\pi} \ldots\ldots 0{,}0000330.$$

Hiemit steht die fernere Rechnung so:

$$\begin{aligned}
\text{Brigg. Log. } \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1) &= 0{,}2385385.4 \\
\text{Brigg. Log. } \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1) \cdots & \; 9{,}3775585.4 \\
\text{Compl. } M \cdots & \; 0{,}3622157.2 \\
\frac{2K'}{\pi} \quad \ldots\ldots & \; 0{,}0000330.0 \\
F(\varphi, k) \cdots & \; 9{,}7398072.6.
\end{aligned}$$

Mithin

$$F(\varphi, k) = 0{,}5492970, \text{ für } \varphi = 30^0 \text{ und } k = \sin 89^0.$$

Digitized by Google

§ 53.

*Legendre**) hat auch einen Näherungswerth für K finden gelehrt, wenn k sehr nahe an 1, K also eine sehr grosse Zahl ist. Da nämlich k_n und $k'_{(n)}$ zur 1 convergiren, so kann man sich die Aufgabe stellen, K_n oder $K'_{(n)}$ für grosse Werthe von n zu bestimmen. Dabei ist nun zu bemerken, dass, wenn n so gross ist, dass man innerhalb einer angenommenen Näherungsgrenze k_n oder $k'_{(n)}$ der Eins gleich setzen kann, darum k'_n und $k_{(n)}$ noch nicht verschwindend klein anzunehmen sind; denn diese Werthe verhalten sich wie Sinus und Cosinus; ist der Sinus aber eine kleine Grösse der ersten Ordnung, so ist der zugehörige Cosinus um eine kleine Grösse der zweiten Ordnung von Eins verschieden. Wir können also annehmen, dass zwar k_n gleich 1 gesetzt, k'_n aber nicht vernachlässigt werden darf. Alsdann ist

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_n}{\Delta(\varphi_n, k_n)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_n}{\cos\varphi_n}.$$

Da aber wegen der Gleichung (24)

$$\int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi_n}{\Delta(\varphi_n, k_n)} = \frac{2}{1+k_n} \int_0^{\varphi_{n+1}} \frac{d\varphi_{n+1}}{\Delta(\varphi_{n+1}, k_{n+1})}$$

ist, so erhält man auch

$$K_n = \frac{2}{1+k_n} \int_0^{\varphi_{n+1}} \frac{d\varphi_{n+1}}{\cos\varphi_{n+1}},$$

worin noch der Werth von φ_{n+1} für $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$ zu bestimmen ist. Nun ist aber wegen (23)

$$\operatorname{tg}(\varphi_n - \varphi_{n+1}) = k'_{n+1} \operatorname{tg}\varphi_{n+1}.$$

Setzt man darin $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$, so wird $\operatorname{tg}(\varphi_n - \varphi_{n+1}) = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_{n+1}}$, folglich

$$\operatorname{tg}\varphi_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{k'_{n+1}}},$$

*) *Legendre*, Exercices I. § 72 ff. Traité I. Chap. XIX.

Digitized by Google

mithin erhält man

$$K_n = \frac{2}{1+k_n}\int_0^{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1}{k'_{n+1}}}} \frac{d\varphi_{n+1}}{\cos\varphi_{n+1}} = \frac{1}{1+k_n}\log\frac{1+\sin\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1}{k'_{n+1}}}}{1-\sin\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1}{k'_{n+1}}}},$$

oder, da $\sin\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1}{k'_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{1+k'_{n+1}}}$ ist,

$$K_n = \frac{1}{1+k_n}\log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{1+k'_{n+1}}}}{1-\frac{1}{\sqrt{1+k'_{n+1}}}} = \frac{1}{1+k_n}\log\frac{\sqrt{1+k'_{n+1}}+1}{\sqrt{1+k'_{n+1}}-1}$$

$$= \frac{1}{1+k_n}\log\frac{1+1+k'_{n+1}+2\sqrt{1+k'_{n+1}}}{k'_{n+1}}.$$

Nun war schon angenommen, dass $k_n = 1$ sei. Aus den Formeln (22) folgt aber

$$1 + k'_{n+1} = \frac{2}{1+k_n} = 1.$$

Der Zähler des vorigen Ausdrucks ist also gleich 4 zu setzen, und dann ist

$$K_n = \tfrac{1}{2}\log\frac{4}{k'_{n+1}} = \log\frac{2}{\sqrt{k'_{n+1}}}.$$

Ferner ist (22)

$$1 + k_n = \frac{k'_n}{\sqrt{k'_{n+1}}}, \quad \text{also } \sqrt{k'_{n+1}} = \frac{k'_n}{1+k_n} = \frac{k'_n}{2},$$

mithin

$$K_n = \log\frac{4}{k'_n}.$$

Demnach ist nun auch

$$K'_{(n)} = \log\frac{4}{k_{(n)}},$$

oder etwas anders ausgesprochen: Ist k so klein, dass innerhalb der angenommenen Näherungsgrenze k' nicht mehr von 1 verschieden ist, so ist mit derselben Annäherung

$$K' = \log\frac{4}{k}.$$

Digitized by Google

Es ist nun leicht zu sehen, wie man dies auch zur Berechnung von K für grössere Werthe von k benutzen kann. Denn nimmt man n so gross an, dass $k_n = 1$ zu setzen ist, so erhält man aus (27) mit Benutzung des eben gefundenen Werthes von K_n:

$$K = \frac{(1+k'_1)(1+k'_2)\cdots\cdots(1+k'_n)\log\frac{4}{k'_n}}{2^n},$$

oder weil dann $1 + k'_{n+1} = 1$, also mit derselben Annäherung auch

$$(1+k'_1)(1+k'_2)\cdots\cdots 1+k'_n) = \frac{2K'}{\pi}$$

zu setzen ist,

$$K = \frac{2K'}{\pi}\cdot\frac{\log\frac{4}{k'_n}}{2^n} = \frac{2K'}{\pi}\cdot\frac{\text{Brigg. Log.}\frac{4}{k'_n}}{M2^n}, \quad \cdots \quad (30)$$

wo M wie vorhin den Modulus des Briggischen Logarithmensystems bedeutet.

Nehmen wir z. B. für k denselben Werth wie im vorigen §, nämlich

$$k = \sin 89^0,$$

so ist, wie dort erwähnt, $k_1 = 1$, also $n = 1$. Setzt man aber $k' = \sin\theta$, so wird $k'_1 = \text{tg}^2\,\frac{1}{2}\,\theta$, also hier $k'_1 = \text{tg}^2\,(0^0\,30')$. Man hat nun

$\text{tg}\,(0^0\,30')\cdots$	7,9408584.0
$k'_1\cdots$	5,8817168.0
$4\cdots$	0,6020599.9
Brigg. Log. $\frac{4}{k'_1} =$	4,7203431.9
Brigg. Log. $\frac{4}{k'_1}\cdots$	0,6739735.7
$\frac{2K'}{\pi}\cdots$	0,0000330.0
Compl. $M\cdots$	0,3622157.2
Compl. $2\cdots$	9,6989700.0
$K\cdots$	0,7351922.9

also

$$K = 5{,}4349087.$$

Vertauscht man in der vorigen Formel k mit k', so er-

Digitized by Google

hält man auch eine Formel, die zur Berechnung von K' für kleine Werthe von k dienlich ist, nämlich

$$(31) \quad \ldots \quad K' = \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{\text{Brigg. Log.} \frac{4}{k_{(n)}}}{M 2^n},$$

in welcher nun n so gross anzunehmen ist, dass $k'_{(n)} = 1$ gesetzt werden kann.

Zwölfter Abschnitt.

Entwickelung der elliptischen Functionen in Factorenfolgen.

§ 54.

Wir haben gesehen, dass zwei aufeinanderfolgende Winkel φ und φ_0 unter andern auch durch die Gleichung (11) § 49 verbunden sind:

$$\sin \varphi_0 = \frac{(1 + k') \sin \varphi \cos \varphi}{\Delta (\varphi, k)}.$$

Führen wir darin statt der Winkel φ_0 und φ, die Winkel φ und φ_1 und also auch die zugehörigen Moduln k_1 und k'_1 ein (siehe § 52), so ist

$$(1) \quad \ldots \quad \sin \varphi = \frac{(1 + k'_1) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\Delta (\varphi_1, k_1)},$$

welche Gleichung sich auch durch Umformung der Gleichungen

$$\sin (2\varphi_1 - \varphi) = k \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} (\varphi - \varphi_1) = k'_1 \operatorname{tg} \varphi_1$$

ergiebt. Es war ferner (26) § 52

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\Delta (\varphi_1, k_1)} = \frac{1 + k}{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta (\varphi, k)}$$

und

$$1 + k = \frac{2}{1 + k'_1} = \frac{K_1}{K},$$

mithin

$$F (\varphi_1, k_1) = \frac{K_1}{2K} F (\varphi, k).$$

Digitized by Google

Setzt man nun

$$F(\varphi, k) = u, \quad F(\varphi_1, k_1) = u_1,$$

so wird

$$u_1 = \frac{K_1}{2K} u.$$

Ferner

$$\varphi = am\,(u, k), \quad \varphi_1 = am\,(u_1, k_1) = am\left(\frac{K_1}{2K} u, k_1\right).$$

Setzt man diese Werthe in (1) hinein, so erhält man

$$\sin am\,(u, k) = (1 + k'_1)\,\frac{\sin am\left(\frac{K_1}{2K} u, k_1\right) \cos am\left(\frac{K_1}{2K} u, k_1\right)}{\Delta am\left(\frac{K_1}{2K} u, k_1\right)}.$$

Da aber allgemein

$$\frac{\cos am\,(v, k_1)}{\Delta am\,(v, k_1)} = \sin am\,(v + K_1, k_1)$$

ist, so hat man auch

$$\frac{\cos am\left(\frac{K_1}{2K} u, k_1\right)}{\Delta am\left(\frac{K_1}{2K} u, k_1\right)} = \sin am\left(\frac{K_1}{2K} u + K_1, k_1\right) = \sin am\left(\frac{K_1}{2K}(u + 2K), k_1\right),$$

und folglich

$$\sin am\,(u, k) = (1 + k'_1) \sin am\,\frac{K_1 u}{2K} \sin am\left(\frac{K_1}{2K}(u + 2K)\right) \ldots (2)$$

(Mod. k_1).

Diese Formel, welche in der Trigonometrie ihr Analogon in der bekannten Gleichung

$$\sin \varphi = 2 \sin \tfrac{1}{2} \varphi \cdot \sin \tfrac{1}{2} (\varphi + \pi)$$

findet, lehrt, dass man den Sinus der Amplitude in ein Product zweier Amplitudensinus verwandeln kann, so, dass der Modul der letzteren der vergrösserte Modul k_1 ist. Für einen schon beliebig vergrösserten Modul k_n und das Argument v wird daher auch sein

$$\sin am\,(v, k_n) = (1 + k'_{n+1}) \sin am\,\frac{K_{n+1}}{2K_n} v \sin am\left\{\frac{K_{n+1}}{2K_n}(v + 2K_n)\right\}$$

(Mod. k_{n+1}).

Indem man diese Gleichung auf jeden in der Gleichung (2) enthaltenen Factor anwendet, und dies so oft als man will

Digitized by Google

wiederholt, gelangt man dazu, sin *am u* in Factoren zu zerfällen. Man erhält nämlich nun

$$\sin am\left(\frac{K_1 u}{2K}, k_1\right) = (1 + k'_2) \sin am \frac{K_2}{2K_1} \cdot \frac{K_1 u}{2K}$$
$$\times \sin am \left\{\frac{K_2}{2K_1}\left(\frac{K_1 u}{2K} + 2K_1\right)\right\} \text{ (Mod. } k_2)$$
$$= (1+k'_2) \sin am \frac{K_2 u}{2^2 K} \sin am \frac{K_2}{2^2 K}(u+4K) \text{ (Mod. } k_2),$$

$$\sin am \left\{\frac{K_1}{2K}(u + 2K), k_1\right\} = (1 + k'_2) \sin am \frac{K_2}{2^2 K}(u + 2K)$$
$$\times \sin am \frac{K_2}{2K_1}\left(\frac{K_1}{2K}(u + 2K) + 2K_1\right) \text{ (Mod. } k_2).$$

Hier ist das letzte Argument gleich

$$\frac{K_2}{2^2 K}(u + 6K);$$

weil aber

$$\sin am (v, k_2) = \sin am (2K_2 - v, k_2)$$

ist, so kann man, ohne den Werth von sin *am* zu ändern, dieses Argument von $2K_2$ abziehen, und erhält dann

$$2K_2 - \frac{K_2}{2^2 K}(u + 6K) = \frac{K_2}{2^2 K}(2K - u),$$

mithin

$$\sin am \left\{\frac{K_1}{2K}(u + 2K), k_1\right\} = (1 + k'_2) \sin am \frac{K_2}{2^2 K}(2K + u)$$
$$\times \sin am \frac{K_2}{2^2 K}(2K - u) \text{ (Mod. } k_2).$$

Setzt man nun diese Werthe in (2) hinein, so erhält man

$$(3) \quad \begin{cases} \sin am (u, k) = (1 + k'_1)(1 + k'_2)^2 \sin am \frac{K_2 u}{2^2 K} \\ \times \sin am \frac{K_2}{2^2 K}(2K \pm u) \sin am \frac{K_2}{2^2 K}(4K + u) \text{ (Mod. } k_2), \end{cases}$$

worin das doppelte Zeichen für zwei Factoren, einen mit dem oberen, den anderen mit dem unteren Zeichen, der Kürze wegen geschrieben ist.

Jetzt zerfälle man auf's Neue jeden Amplitudensinus in zwei Factoren. Schreiben wir nur die Argumente der letzteren hin, so erhalten wir

Digitized by Google

aus d. 1ten Factor 1) $\frac{K_3 u}{2^3 K}$, 2) $\frac{K_3}{2K_2}\left(\frac{K_2 u}{2^2 K} + 2K_2\right)$,

aus dem 2ten und 3ten Factor 3) $\frac{K_3}{2^3 K}(2K \pm u)$, 4) $\frac{K_3}{2K_2}\left(\frac{K_2}{2^2 K}(2K \pm u) + 2K_2\right)$,

aus d. 4ten Factor 5) $\frac{K_3}{2^3 K}(4K + u)$, 6) $\frac{K_3}{2K_2}\left(\frac{K_2}{2^2 K}(4K + u) + 2K_2\right)$.

Es ist nun

$$2) = \frac{K_3}{2^3 K}(u + 8K);\quad 4) = \frac{K_3}{2^3 K}(10K \pm u);\quad 6) = \frac{K_3}{2^3 K}(12K + u).$$

Zieht man aber die beiden letzten Argumente von $2K_3$ ab, wodurch Sinus Amplitude unverändert bleibt, weil k_3 der neue Modul ist, so werden sie

$$4) = \frac{K_3}{2^3 K}(6K \mp u),\quad 6) = \frac{K_3}{2^3 K}(4K - u),$$

und da nun jeder der vier Factoren in dem Ausdrucke (3) den Coefficienten $(1 + k'_3)$ liefert, so giebt die neue Entwickelung:

$$\begin{aligned}\sin am\,(u, k) &= (1 + k'_1)\,(1 + k'_2)^2\,(1 + k'_3)^4 \sin am \frac{K_3 u}{2^3 K}\\ &\times \sin am \frac{K_3}{2^3 K}(2K \pm u) \sin am \frac{K_3}{2^3 K}(4K \pm u)\\ &\times \sin am \frac{K_3}{2^3 K}(6K \pm u) \sin am \frac{K_3}{2^3 K}(8K + u) \text{ (Mod. } k_3).\end{aligned}$$

Hiedurch ist das Gesetz der Fortschreitung klar, und man erhält allgemein:

$$\left.\begin{aligned}&\sin am\,(u,k) = (1+k'_1)\,(1+k'_2)^2\,(1+k'_3)^4 \cdots (1+k'_n)^{2^{n-1}}\\ &\times \sin am \frac{K_n u}{2^n K} \sin am \frac{K_n}{2^n K}(2K \pm u) \sin am \frac{K_n}{2^n K}(4K \pm u)\\ &\times \sin am \frac{K_n}{2^n K}(6K \pm u) \cdots \sin am \frac{K_n}{2^n K}[(2^n - 2)K \pm u]\\ &\times \sin am \frac{K_n}{2^n K}(2^n K + u) \text{ (Mod. } k_n).\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Denkt man sich nun diese Entwickelung bis ins Unendliche fortgesetzt, so wird in der Grenze $k_n = 1$, $k'_n = 0$. Wir werden den alsdann entstehenden Werth des Coefficienten der Entwickelung später besonders bestimmen und bezeichnen ihn vorläufig mit A', setzen also

$$A' = (1 + k'_1)\,(1 + k'_2)^2\,(1 + k'_3)^4\,(1 + k'_4)^8 \cdots$$

Digitized by Google

Dass die Factoren dieses Products zur Grenze 1 convergiren, erhellt daraus, dass man hat

$$1 + k'_n = \frac{2}{1 + k_{n-1}},$$

welcher Ausdruck sich um so mehr der Eins nähert, je mehr k_{n-1} dies thut.

Auch die Factoren der Entwickelung (4) convergiren zur Eins. Um dies einzusehen, bemerke man, dass das Argument des letzten Factors sich schreiben lässt

$$K_n + \frac{K_n u}{2^n K}.$$

Da nun der Modul k_n ist, so ist

$$\sin am\left(K_n + \frac{K_n u}{2^n K}\right) = \frac{\cos am \dfrac{K_n u}{2^n K}}{\Delta am \dfrac{K_n u}{2^n K}} \quad (\text{Mod. } k_n).$$

Wird dann in der Grenze $k_n = 1$, so ist $\cos = \Delta$, mithin der letzte Factor $= 1$.

Den Grenzwerth des in allen Argumenten der Entwickelung (4) vorkommenden Factors $\frac{K_n}{2^n K}$ haben wir § 52 ermittelt; es ist nämlich (28)

$$\lim \frac{K_n}{2^n K} = \frac{\pi}{2K'}.$$

Demnach erhält man aus (4) für $n = \infty$, wenn man den letzten Factor, der sich in der Grenze der Einheit gleich ergeben hat, als überflüssig fortlässt,

$$\sin am\,(u, k) = A' \sin am \frac{\pi u}{2K} \qquad (\text{Mod. } 1)$$

$$\times \sin am \frac{\pi}{2K}(2K+u) \sin am \frac{\pi}{2K}(4K+u) \sin am \frac{\pi}{2K}(6K+u) \cdots$$

$$\times \sin am \frac{\pi}{2K}(2K-u) \sin am \frac{\pi}{2K}(4K-u) \sin am \frac{\pi}{2K}(6K-u) \cdots$$

oder, wenn man sich zur Bezeichnung eines Products des Zeichens Π in ähnlicher Weise bedient, wie das Zeichen Σ zur Bezeichnung einer Summe angewendet wird, nämlich

$$\prod_1^{\infty}{}_h f(h) = f(1) f(2) f(3) f(4) \ldots.$$

setzt,

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}\sin am\,(u,k) = A'\sin am\,\frac{\pi u}{2K'}\prod_1^{\infty}{}^{h}\sin am\,\frac{\pi}{2K'}\,(2hK+u)\\ \text{(Mod. 1)}\qquad\qquad \asymp \sin am\,\frac{\pi}{2K'}\,(2hK-u).\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Dieser Ausdruck ist nun einer weiteren Entwickelung fähig, da die elliptischen Functionen für den Werth 1 des Moduls in Exponentialfunctionen übergehen. Nach § 4 ist nämlich

$$\sin am\,(v,1) = \frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}}.$$

Demnach ist in (5)

$$\sin am\,\frac{\pi u}{2K'} = \frac{e^{\frac{\pi u}{2K'}}-e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{e^{\frac{\pi u}{2K'}}+e^{-\frac{\pi u}{2K'}}},$$

$$\sin am\,\frac{\pi}{2K'}\,(2hK\pm u) = \frac{e^{\frac{h\pi K}{K'}}e^{\pm\frac{\pi u}{2K'}}-e^{-\frac{h\pi K}{K'}}e^{\mp\frac{\pi u}{2K'}}}{e^{\frac{h\pi K}{K'}}e^{\pm\frac{\pi u}{2K'}}+e^{-\frac{h\pi K}{K'}}e^{\mp\frac{\pi u}{2K'}}}.$$

In dem letzteren Ausdrucke führen wir die für die ganze Theorie der Entwickelung der elliptischen Functionen überaus wichtigen Grössen q und q' ein. *Jacobi* setzte nämlich*)

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},\quad q' = e^{-\frac{\pi K}{K'}}. \quad (6)$$

Dann wird

$$\sin am\,\frac{\pi}{2K'}\,(2hK\pm u) = \frac{q'^{-h}e^{\pm\frac{\pi u}{2K'}}-q'^{h}e^{\mp\frac{\pi u}{2K'}}}{q'^{-h}e^{\pm\frac{\pi u}{2K'}}+q'^{h}e^{\mp\frac{\pi u}{2K'}}},$$

$$\begin{aligned}&\sin am\,\frac{\pi}{2K'}\,(2hK+u)\sin am\,\frac{\pi}{2K'}\,(2hK-u)\\ &= \frac{q'^{-h}e^{\frac{\pi u}{2K'}}-q'^{h}e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{q'^{-h}e^{\frac{\pi u}{2K'}}+q'^{h}e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}\cdot\frac{q'^{-h}e^{-\frac{\pi u}{2K'}}-q'^{h}e^{\frac{\pi u}{2K'}}}{q'^{-h}e^{-\frac{\pi u}{2K'}}+q'^{h}e^{\frac{\pi u}{2K'}}}\\ &= \frac{q'^{-2h}+q'^{2h}-\left(e^{\frac{\pi u}{K'}}+e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right)}{q'^{-2h}+q'^{2h}+\left(e^{\frac{\pi u}{K'}}+e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right)}.\end{aligned}$$

*) *Jacobi*, Fundamenta nova. § 35.

Digitized by Google

Verwandelt man aber die Exponentialfunctionen in trigonometrische mit imaginären Variablen, indem

$$\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = -i \operatorname{tg} iv; \quad e^v + e^{-v} = 2 \cos iv$$

ist, so erhält man

$$\sin am \frac{\pi u}{2K'} = -i \operatorname{tg} \frac{\pi i u}{2K'},$$

$$(7) \cdot \begin{cases} \sin am \frac{\pi}{2K'}(2hK + u) \sin am \frac{\pi}{2K'}(2hK - u) \\ \qquad (\text{Mod. } 1) \cdot \\ \qquad = \frac{q'^{-2h} + q'^{2h} - 2\cos\frac{\pi i u}{K'}}{q'^{-2h} + q'^{2h} + 2\cos\frac{\pi i u}{K'}} \\ \qquad = \frac{1 - 2q'^{2h}\cos\frac{\pi i u}{K'} + q'^{4h}}{1 + 2q'^{2h}\cos\frac{\pi i u}{K'} + q'^{4h}}. \end{cases}$$

Endlich führe man auch auf der linken Seite der Gleichung (5) iu statt u ein, dann erhält man, weil nach den Formeln (12) des § 8

$$\sin am (u, k) = -i \operatorname{tg} am (iu, k')$$

ist, mit Weglassung des auf beiden Seiten gemeinschaftlichen Factors $-i$,

$$\operatorname{tg} am (iu, k') = A' \operatorname{tg} \frac{\pi i u}{2K'} \prod_1^\infty \frac{1 - 2q'^{2h}\cos\frac{\pi i u}{K'} + q'^{4h}}{1 + 2q'^{2h}\cos\frac{\pi i u}{K'} + q'^{4h}}.$$

Setzt man nun noch u statt iu und zugleich auch k statt k', wodurch K' in K, K in K' und, wie die Formeln (6) zeigen, q' in q übergeht, bezeichnet ferner mit A die Grösse, in welche die ebenfalls nur von k' abhängige Grösse A' dann übergeht; setzt man also

$$(8) \quad A = (1 + k_0)(1 + k_{00})^2 (1 + k_{(3)})^4 (1 + k_{(4)})^8 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot,$$

so erhält man tg $am\, u$ in folgendes unendliche Product entwickelt:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg} am(u,k) &= A \operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} \prod_1^{\infty}{}^{h} \frac{1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}}{1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}} \\
&= A \operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} \frac{1-2q^{2}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4}}{1+2q^{2}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4}} \\
&\quad \times \frac{1-2q^{4}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{8}}{1+2q^{4}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{8}} \\
&\quad \times \frac{1-2q^{6}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}}{1+2q^{6}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}} \cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \cdot \quad (9)$$

§ 55.

Die Grössen q und q' sind im Allgemeinen sehr kleine Grössen, sodass das vorstehende unendliche Product sehr rasch convergirt. Es hat keine Schwierigkeit, sie aus den Formeln (6) zu berechnen. Denn man erhält

$$\log q = -\pi\frac{K'}{K}, \quad \log q' = -\pi\frac{K}{K'}.$$

Bezeichnet also M den Modulus des Briggischen Logarithmensystems, so ist

$$\text{Brigg. Log. } q = -M\pi\frac{K'}{K}; \quad \text{Brigg. Log. } q' = -M\pi\frac{K}{K'}.$$

Ausserdem erhält man q' aus q oder umgekehrt, da sich leicht die Relation

$$\log q \log q' = \pi^2 \quad \cdots\cdots \quad (10)$$

ergiebt. Für den Mittelwerth $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist $k = k'$, also auch $K = K'$, folglich dann

$$\text{Brigg. Log. } q = -M\pi.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\pi &\cdots 0{,}4971498.7 \\
M &\cdots 9{,}6377842.8 \\
\hline
M\pi &\cdots 0{,}1349341.5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Brigg. Log. } q &= -1{,}3643762.6 \\
&= 8{,}6356237.4 \\
q &= 0{,}0432138.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Also für $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist q ungefähr $= \frac{1}{23}$. Bildet man die verschiedenen Potenzen dieses Mittelwerths von q, so ergiebt sich:

$q^2 \cdots 7{,}2712474.8 = 0{,}0018674$, $q^5 \cdots 3{,}1781187.0 = 0{,}0000001.5$,
$q^3 \cdots 5{,}9068712.2 = 0{,}0000807$, $q^6 \cdots 1{,}8137424.4 = 0{,}0000000.0$.
$q^4 \cdots 4{,}5424949.6 = 0{,}0000035$,

Daraus geht hervor, dass für $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ der dritte Factor in der Entwickelung (9) schon keinen Einfluss mehr auf die 7te Decimale hat.

Eine Methode, q unmittelbar aus k zu berechnen, erhält man auf folgendem Wege. Wir haben § 53 (31) eine Relation zwischen K und K' kennen gelernt, nämlich die folgende:

$$K' = \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{\log \frac{4}{k_{(n)}}}{2^n},$$

welche desto richtiger ist, je grösser n angenommen wird, und für $n = \infty$ vollkommen genau ist. Daraus folgt

$$\pi \frac{K'}{K} = \frac{\log \frac{16}{k_{(n)}^2}}{2^n} = \log \sqrt[2^n]{\frac{16}{k_{(n)}^2}}; \quad -\pi \frac{K'}{K} = \log \sqrt[2^n]{\frac{k_{(n)}^2}{16}},$$

folglich ist

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}} = \sqrt[2^n]{\frac{k_{(n)}^2}{16}}.$$

Um nun diesen Ausdruck aus dem Modul herzuleiten, setzen wir zur Abkürzung $\frac{k^2}{16\,k'} = \delta$, und wenn wir von k zu k_0, k_{00}, etc. fortschreiten,

$$\frac{k_0^2}{16\,k'_0} = \delta_0, \quad \frac{k_{00}^2}{16\,k'_{00}} = \delta_{00}, \ldots\ldots \frac{k_{(n)}^2}{16\,k'_{(n)}} = \delta_{(n)}.$$

Da nun $k'_{(n)}$ in der Grenze 1 ist und zwar eher diese Grenze erreicht, als $k_{(n)}$ verschwindet, so ist auch

$$\delta_{(n)} = \frac{k_{(n)}^2}{16}, \text{ mithin } q = \sqrt[2^n]{\delta_{(n)}},$$

und es kommt nun darauf an, $\delta_{(n)}$ aus δ zu berechnen. Nun ist aber:

$$\frac{k^2}{k'} = \frac{1 - k'^2}{k'} = \frac{(1-k')(1+k')}{k'} \text{ und } k' = \frac{1-k_0}{1+k_0}, \; 1 + k' = \frac{2}{1+k_0},$$

$$1 - k' = \frac{2k_0}{1+k_0}, \quad \frac{1-k'}{k'} = \frac{2k_0}{1-k_0},$$

Digitized by Google

mithin wird

$$\frac{k^2}{k'} = \frac{4k_0}{(1-k_0)(1+k_0)} = \frac{4k_0}{k'^2_0}, \quad \text{also } \delta = \frac{k^2}{16k'} = \frac{k_0}{4k'^2_0}.$$

Daraus folgt ferner

$$\delta^2 = \frac{k^2_0}{16k'^4_0}.$$

Dividirt man dieses aber durch δ_0, so erhält man zwischen δ und δ_0 die Relation

$$\frac{\delta^2}{\delta_0} = \frac{1}{k'^3_0} \text{ oder } \delta = \sqrt{\frac{\delta_0}{k'^3_0}}.$$

Daraus folgt successive:

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{\delta_{00}}{k'^3_{(n)}}}, \text{ also } \sqrt{\delta_0} = \sqrt[4]{\frac{\delta_{00}}{k'^3_{00}}}.$$

$$\delta_{00} = \sqrt{\frac{\delta_{(3)}}{k'^3_{(3)}}}, \text{ also } \sqrt[4]{\delta_{00}} = \sqrt[8]{\frac{\delta_{(3)}}{k'^3_{(3)}}},$$

. . . . . .

$$\delta_{(n-1)} = \sqrt{\frac{\delta_{(n)}}{k'^3_{(n)}}}, \text{ also } \sqrt[2^{n-1}]{\delta_{(n-1)}} = \sqrt[2^n]{\frac{\delta_{(n)}}{k'^3_{(n)}}}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen, so kommt

$$\delta = \frac{\sqrt[2^n]{\delta_{(n)}}}{\sqrt{k'^3_0}\,\sqrt[4]{k'^3_{00}}\,\sqrt[8]{k'^3_{000}} \cdots \sqrt[2^n]{k'^3_{(n)}}},$$

folglich

$$\sqrt[2^n]{\delta_{(n)}} = q = \delta\,(k'_0)^{\frac{3}{2}}(k'_{00})^{\frac{3}{4}}(k'_{(3)})^{\frac{3}{8}} \cdots\cdots$$

oder

$$q = \frac{k^2}{16k'}\,(k'_0)^{\frac{3}{2}}(k'_{00})^{\frac{3}{4}}(k'_{(3)})^{\frac{3}{8}}(k'_{(4)})^{\frac{3}{16}} \cdots\cdots$$

$$= \frac{k_0}{4k'^2_0}\left\{(k'_0)^{\frac{1}{2}}(k'_{00})^{\frac{1}{4}}(k'_{(3)})^{\frac{1}{8}}(k'_{(4)})^{\frac{1}{16}} \cdots\cdots\right\}^3.$$

§ 56.

Aus der Entwickelung (9) leitet sich nun zuerst ein unendliches Product für $\Delta\, am\, u$ ab, wenn man $u + iK'$ statt u setzt, weil nämlich (§ 10 S. 29)

Digitized by Google

$$\operatorname{tg} am\,(u + iK') = \frac{i}{\Delta\, am\, u}$$

ist. Bequemer aber wird diese Umformung, wenn man von der Formel (5) ausgeht, darin zuerst $u + K$ statt u, und dann u für iu und k für k' setzt, wodurch man dasselbe Resultat erhält. Setzt man also in (5) $u + K$ für u, so kommt, weil

$$\sin am\,(u + K) = \frac{\cos am\, u}{\Delta\, am\, u}$$

ist,

$$\frac{\cos am\, u}{\Delta\, am\, u} = A' \sin am \frac{\pi(u+K)}{2K'} \prod_1^{\infty} \sin am \frac{\pi[(2h+1)K+u]}{2K'} \times \sin am \frac{\pi[(2h-1)K-u]}{2K'} \text{ (Mod. 1).}$$

Nun stellt $2h - 1$ die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, etc. und
$2h + 1$ die Zahlen 3, 5, 7, 9, etc. dar.

Bemerkt man daher, dass der ausserhalb des Zeichens Π stehende Factor $\sin am \frac{\pi(u+K)}{2K'}$ gerade der in der zweiten Reihe fehlende ist, so kann man diesen unter das Zeichen Π stellen, wenn man unter demselben $2h - 1$ statt $2h + 1$ setzt. Folglich ist

$$(11)\quad \left\{ \frac{\cos am\, u}{\Delta\, am\, u} = A' \prod_1^{\infty} \sin am \frac{\pi[(2h-1)K+u]}{2K'} \times \sin am \frac{\pi[(2h-1)K-u]}{2K'} \text{ (Mod. 1).} \right.$$

Alsdann aber unterscheidet sich das unter Π stehende Product von dem in Gleichung (7) umgeformten nur dadurch, dass $2h - 1$ an die Stelle von $2h$ getreten ist. Setzt man also in (7) nur $2h - 1$ statt statt $2h$ und also auch $4h - 2$ statt $4h$, so erhält man

$$\sin am \frac{\pi[(2h-1)K+u]}{2K'} \sin am \frac{\pi[(2h-1)K-u]}{2K'} \text{ (Mod. 1)} = \frac{1 - 2q'^{2h-1} \cos \frac{\pi i u}{K'} + q'^{4h-2}}{1 + 2q'^{2h-1} \cos \frac{\pi i u}{K'} + q'^{4h-2}}.$$

Führt man nun auch auf der linken Seite der Gleichung (11) iu ein, indem man nach § 8 hat:

Digitized by Google

$$\cos am\,(u,k) = \frac{1}{\cos am\,(iu,k')}\,;\quad \Delta am\,(u,k) = \frac{\Delta am\,(iu,k')}{\cos am\,(iu,k')},$$

woraus

$$\frac{\cos am\,(u,k)}{\Delta am\,(u,k)} = \frac{1}{\Delta am\,(iu,k')}$$

folgt, so erhält man aus (11)

$$\frac{1}{\Delta am\,(iu,k')} = A' \prod_1^{\infty}{}^{k} \frac{1 - 2q'^{2k-1}\cos\frac{\pi iu}{K'} + q'^{4k-2}}{1 + 2q'^{2k-1}\cos\frac{\pi iu}{K'} + q'^{4k-2}},$$

und, wenn man nun statt iu, k', K', q', A' resp. u, k, K, q, A setzt und die Brüche umkehrt,

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(u,k) = \frac{1}{A} \prod_1^{\infty}{}^{k} \frac{1 + 2q^{2k-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4k-2}}{1 - 2q^{2k-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4k-2}} \qquad (12)$$

$$= \frac{1}{A} \cdot \frac{1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + q^2}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + q^2} \cdot \frac{1 + 2q^3\cos\frac{\pi u}{K} + q^6}{1 - 2q^3\cos\frac{\pi u}{K} + q^6} \cdot \frac{1 + 2q^5\cos\frac{\pi u}{K} + q^{10}}{1 - 2q^5\cos\frac{\pi u}{K} + q^{10}} \cdot \cdots$$

Wir kennen jetzt Entwickelungen für tg *am u* und $\Delta\,am\,u$. Daraus ergeben sich sofort auch Entwickelungen für sin *am u* und cos *am u*. Erinnert man sich nämlich der im § 10 bemerkten Eigenschaft, dass die Functionen sin *am u* und $\Delta\,am\,u$ für dieselben Werthe von u unendlich gross werden, so weiss man, dass diese beiden Functionen bis auf einen von u unabhängigen Factor denselben Nenner haben müssen. Da aber ferner sin *am u* und tg *am u* für dieselben Werthe von u Null werden, so müssen sin *am u* und tg *am u* bis auf einen constanten Factor denselben Zähler haben. Folglich hat sin *am u* denselben Zähler wie tg *am u* und denselben Nenner wie $\Delta\,am\,u$. Bezeichnet also B eine neue, später zu bestimmende Grösse, welche nur von k abhängig, von u aber unabhängig ist, so hat man sofort:

$$\sin am\,(u,k) = B \sin\frac{\pi u}{2K} \prod_1^{\infty}{}^{k} \frac{1 - 2q^{2k}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4k}}{1 - 2q^{2k-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4k-2}}, \quad \cdots (13)$$

Digitized by Google

und weil ferner

$$\cos am\, u = \frac{\sin am\, u}{\operatorname{tg} am\, u}$$

ist,

$$(14)\ \cdot\cdot\ \cos am\,(u,k) = \frac{B}{A}\cos\frac{\pi u}{2K}\prod_1^{\infty}{}^{h}\frac{1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}.$$

§ 57.

Wir schreiten jetzt zur Bestimmung der Constanten A und B. Diese geschieht dadurch, dass man für u specielle Werthe in die Formeln (12), (13), (14) einsetzt, nämlich die Werthe 0, K und $K + iK'$. Dadurch werden sich dann zugleich wichtige Relationen zwischen k, K und q ergeben.

Setzt man zuerst $u = 0$, so folgt

aus (13) 1) $0 = 0$,

aus (14) 2) $1 = \frac{B}{A}\prod_1^{\infty}{}^{h}\left(\frac{1+q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2$,

aus (12) 3) $1 = \frac{1}{A}\prod_1^{\infty}{}^{h}\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}}\right)^2$.

Ferner für $u = K$ folgt

aus (13) 4) $1 = B\prod_1^{\infty}{}^{h}\left(\frac{1+q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^2$,

aus (14) 5) $0 = 0$,

aus (12) 6) $k' = \frac{1}{A}\prod_1^{\infty}{}^{h}\left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h-1}}\right)^2$.

Setzt man endlich $u = K + iK'$, so bemerke man zuerst die § 10 abgeleiteten Formeln

$$\sin am\,(K+iK') = \frac{1}{k},\quad \cos am\,(K+iK') = -\,i\,\frac{k'}{k},$$
$$\Delta am\,(K+iK') = 0.$$

Ferner hat man die Werthe der in (13), (14), (12) vorkommenden Ausdrücke $\sin\frac{\pi u}{2K}$, $\cos\frac{\pi u}{2K}$, $2\cos\frac{\pi u}{K}$ für $u = K + iK'$ zu ermitteln.

Digitized by Google

Es ist aber

$$\sin\frac{\pi(K+iK')}{2K} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi iK'}{2K}\right) = \cos\frac{\pi iK'}{2K}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi K'}{2K}} + e^{-\frac{\pi K'}{2K}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(q^{-\frac{1}{2}} + q^{+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1+q}{2\sqrt{q}},$$

$$\cos\frac{\pi(K+iK')}{2K} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi iK'}{2K}\right) = -\sin\frac{\pi iK'}{2K}$$
$$= -\tfrac{1}{2}i\left(e^{\frac{\pi K'}{2K}} - e^{-\frac{\pi K'}{2K}}\right) = -\tfrac{1}{2}i\left(q^{-\frac{1}{2}} - q^{+\frac{1}{2}}\right)$$
$$= -i\frac{1-q}{2\sqrt{q}},$$

$$2\cos\frac{\pi(K+iK')}{K} = 2\cos\left(\pi+\frac{\pi iK'}{K}\right) = -2\cos\frac{\pi iK'}{K}$$
$$= -\left(e^{\frac{\pi K'}{K}} + e^{-\frac{\pi K'}{K}}\right) = -\left(q^{-1}+q\right) = -\frac{1+q^2}{q}.$$

Dadurch wird

$$1 - 2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h} = 1 + q^{2h-1}(1+q^2) + q^{4h}$$
$$= 1 + q^{2h-1} + q^{2h+1} + q^{4h} = (1+q^{2h-1})(1+q^{2h+1}),$$

$$1 + 2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h} = 1 - q^{2h-1}(1+q^2) + q^{4h}$$
$$= 1 - q^{2h-1} - q^{2h+1} + q^{4h} = (1-q^{2h-1})(1-q^{2h+1}),$$

$$1 + 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2} = 1 - q^{2h-2}(1+q^2) + q^{4h-2}$$
$$= 1 - q^{2h-2} - q^{2h} + q^{4h-2} = (1-q^{2h-2})(1-q^{2h}),$$

$$1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2} = 1 + q^{2h-2}(1+q^2) + q^{4h-2}$$
$$= 1 + q^{2h-2} + q^{2h} + q^{4h-2} = (1+q^{2h-2})(1+q^{2h}),$$

und folglich:

aus (13) 7) $$\frac{1}{k} = B\frac{1+q}{2\sqrt{q}}\prod_1^\infty{}^h \frac{(1+q^{2h-1})(1+q^{2h+1})}{(1+q^{2h-2})(1+q^{2h})},$$

aus (14) 8) $$-i\frac{k'}{k} = -i\frac{B}{A}\frac{1-q}{2\sqrt{q}}\prod_1^\infty{}^h \frac{(1-q^{2h-1})(1-q^{2h+1})}{(1+q^{2h-2})(1+q^{2h})},$$

aus (12) 9) $$0 = \frac{1}{A}\prod_1^\infty{}^h \frac{(1-q^{2h-2})(1-q^{2h})}{(1+q^{2h-2})(1+q^{2h})}.$$

In 7) unterscheiden sich die beiden Factoren $(1+q^{2h-1})$ und $(1+q^{2h+1})$ nur dadurch, dass letzterer den Factor $1+q$

Digitized by Google

nicht enthält. Dieser steht aber vor dem Zeichen Π, also kann man den Zähler schreiben

$$\prod_1^\infty{}_h (1 + q^{2h-1})^2;$$

im Nenner ist für $h = 1$, $(1 + q^{2h-2}) = 2$; setzt man diesen Factor heraus, so werden die beiden Factoren ebenfalls gleich, und der Nenner lässt sich schreiben

$$\prod_1^\infty{}_h (1 + q^{2h})^2.$$

Da nun dieselben Umstände auch in 8) stattfinden, so hat man

$$7)\quad \frac{1}{k} = \frac{B}{4\sqrt{q}} \prod_1^\infty{}_h \left(\frac{1 + q^{2h-1}}{1 + q^{2h}}\right)^2,$$

$$8)\quad \frac{k'}{k} = \frac{B}{A}\frac{1}{4\sqrt{q}} \prod_1^\infty{}_h \left(\frac{1 - q^{2h-1}}{1 + q^{2h}}\right)^2,$$

$$9)\quad 0 = 0,$$

letzteres, weil der Factor $1 - q^{2h-2}$ für $h = 1$ verschwindet.

Ehe wir hieraus die Werthe von A und B bestimmen, wollen wir die scheinbar identischen Relationen 1), 5), 9) näher untersuchen. In den rechten Seiten der Gleichungen (13), (14), (12) verschwindet nämlich jedesmal nur ein einziger Factor, und zwar in (13) $\sin\frac{\pi u}{2K}$ für $u = 0$, in (14) $\cos\frac{\pi u}{2K}$ für $u = K$, und, wie wir eben sahen, in (12) der dem Werthe $h = 1$ entsprechende Factor $(1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + q^2)$ für $u = K + iK'$. Dividiren wir also mit diesen Factoren, so erhalten wir rechts Ausdrücke, die von 0 verschieden sind, und links Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$, deren Werthe wir bestimmen können. Auf diese Weise ergiebt sich zunächst

aus (13) $$1)\quad \left[\frac{\sin am\, u}{\sin\frac{\pi u}{2K}}\right]_{u=0} = B \prod_1^\infty{}_h \left(\frac{1 - q^{2h}}{1 - q^{2h-1}}\right)^2,$$

aus (14) $$5)\quad \left[\frac{\cos am\, u}{\cos\frac{\pi u}{2K}}\right]_{u=K} = \frac{B}{A} \prod_1^\infty{}_h \left(\frac{1 - q^{2h}}{1 + q^{2h-1}}\right)^2,$$

Digitized by Google

aus (12) 9) $$\left[\frac{\Delta\, am\, u}{1+2q\cos\frac{\pi u}{K}+q^2}\right]_{u=K+iK'}$$

$$=\tfrac{1}{2}\frac{1}{\Delta\,(1-q^2)}\prod_1^\infty{}^{h}\left(\frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h}}\right)^2,$$

die letztere Gleichung, weil den obigen Bemerkungen zufolge

$$\prod_1^\infty{}^{h}(1+q^{2h-2})\,(1+q^{2h})=2\prod_1^\infty{}^{h}(1+q^{2h})^2,\text{ und}$$

$$\prod_2^\infty{}^{h}(1-q^{2h-2})\,(1-q^{2h})=(1-q^2)\,(1-q^4)\,(1-q^6)\,(1-q^8)\cdots$$
$$(1-q^4)\,(1-q^6)\,(1-q^8)\cdots$$
$$=\frac{1}{1-q^2}\prod_1^\infty{}^{h}(1-q^{2h})^2$$

ist. Um nun die linker Hand stehenden Werthe zu bestimmen, differentiire man im Zähler und Nenner nach u, so kommt

$$\left[\frac{\sin am\, u}{\sin\frac{\pi u}{2K}}\right]_{u=0}=\left[\frac{\cos am\, u\,\Delta\, am\, u}{\frac{\pi}{2K}\cos\frac{\pi u}{2K}}\right]_{u=0}=\frac{2K}{\pi}$$

$$\left[\frac{\cos am\, u}{\cos\frac{\pi u}{2K}}\right]_{u=K}=\left[\frac{-\sin am\, u\,\Delta\, am\, u}{-\frac{\pi}{2K}\sin\frac{\pi u}{2K}}\right]_{u=K}=\frac{2k'K}{\pi}$$

$$\left[\frac{\Delta\, am\, u}{1+2q\cos\frac{\pi u}{K}+q^2}\right]_{u=K+iK'}=\left[\frac{-k^2\sin am\, u\cos am\, u}{-2q\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi u}{K}}\right]_{u=K+iK'}$$
$$=\frac{k'K}{\pi\,(1-q^2)}.$$

Der letztere Werth ergiebt sich folgendermassen. Es ist

$$\sin\frac{\pi\,(K+iK')}{K}=\sin\left(\pi+\frac{\pi iK'}{K}\right)=-\sin\frac{\pi iK'}{K}$$
$$=-\tfrac{1}{2}\,i\left(e^{\frac{\pi K'}{K}}-e^{-\frac{\pi K'}{K}}\right)$$
$$=-\tfrac{1}{2}\,i\,(q^{-1}-q)=-\,i\frac{1-q^2}{2q}.$$

Setzt man diesen Werth nebst den Werthen $\sin am\,(K+iK')=\frac{1}{k}$ und $\cos am\,(K+iK')=-\,i\,\frac{k'}{k}$ ein, so ergiebt sich

Digitized by Google

Obiges. Hienach ist nun das vollständige Tableau der 9 Formeln folgendes:

$$1)\quad \frac{2K}{\pi} = B\prod\left(\frac{1-q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2,$$

$$2)\quad 1 = \frac{B}{A}\prod\left(\frac{1+q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2,$$

$$3)\quad 1 = \frac{1}{A}\prod\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}}\right)^2,$$

$$4)\quad 1 = B\prod\left(\frac{1+q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^2,$$

$$5)\quad \frac{2k'K}{\pi} = \frac{B}{A}\prod\left(\frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^2,$$

$$6)\quad k' = \frac{1}{A}\prod\left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h-1}}\right)^2,$$

$$7)\quad \frac{1}{k} = \frac{B}{4\sqrt{q}}\prod\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2,$$

$$8)\quad \frac{k'}{k} = \frac{B}{A}\frac{1}{4\sqrt{q}}\prod\left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2,$$

$$9)\quad \frac{2k'K}{\pi} = \frac{1}{A}\prod\left(\frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h}}\right)^2.$$

Daraus ergiebt sich:

$$B = \frac{2K}{\pi}\prod\left(\frac{1-q^{2h-1}}{1-q^{2h}}\right)^2 = \prod\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2$$
$$= \frac{4\sqrt{q}}{k}\prod\left(\frac{1+q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^2,$$

$$\frac{B}{A} = \prod\left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2 = \frac{2k'K}{\pi}\prod\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h}}\right)^2$$
$$= \frac{4k'\sqrt{q}}{k}\prod\left(\frac{1+q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2,$$

$$\frac{1}{A} = \prod\left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h-1}}\right)^2 = k'\prod\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}}\right)^2$$
$$= \frac{2k'K}{\pi}\prod\left(\frac{1+q^{2h}}{1-q^{2h}}\right)^2,$$

also:

$$B = \prod\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2 = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}},$$

Digitized by Google

$$\frac{B}{A} = \prod\left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2 = \frac{2\sqrt{k'}\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}},$$
$$\frac{1}{A} = \prod\left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h-1}}\right)^2 = \sqrt{k'}.$$

Ferner aber

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2K}{\pi} &= \prod\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2\left(\frac{1-q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2,\\
\frac{kK}{2\pi\sqrt{q}} &= \prod\left(\frac{1+q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^2\left(\frac{1-q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2\\
&= \prod\left(\frac{1-q^{4h}}{1-q^{4h-2}}\right)^2,\\
\frac{2k'K}{\pi} &= \prod\left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2\left(\frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^2\\
&= \prod\left(\frac{1-q^{h}}{1+q^{h}}\right)^2,
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

weil nämlich $2h-1$ alle ungeraden, und $2h$ alle geraden, beide zusammen also alle ganzen Zahlen darstellen. In sämmtlichen Producten sind für h alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞ zu setzen. Die Formel $\frac{1}{A} = \sqrt{k'}$ hätte man auch unmittelbar aus dem Ausdrucke (8) § 54

$$A = (1+k_0)\,(1+k_{00})^2\,(1+k_{(3)})^4\,(1+k_{(4)})^8\ldots.$$

ableiten können. Setzt man nämlich nach § 49 S. 193

$$1+k_0 = \frac{k'_0}{\sqrt{k'}},\quad 1+k_{00} = \frac{k'_{00}}{\sqrt{k'_0}},\quad 1+k_{(3)} = \frac{k'_{(3)}}{\sqrt{k'_{00}}},\ \text{etc.},$$

so wird

$$A = \frac{k'_0}{\sqrt{k'}}\cdot\frac{k'^2_{00}}{k'_0}\cdot\frac{k'^4_{(3)}}{k'^2_{00}}\cdot\frac{k'^8_{(4)}}{k'^4_{(3)}}\ldots.$$

Es hebt sich daher jeder Zähler gegen den folgenden Nenner auf, und da die Zähler zur Grenze Eins convergiren, so wird

$$A = \frac{1}{\sqrt{k'}}.$$

Die obigen Formeln enthalten interessante Beziehungen zwischen k, K und q, und zwar geben die folgenden drei

Digitized by Google

$$(16)\quad \begin{cases} k = 4\sqrt{q}\,\prod\left(\frac{1+q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^4, \\ k' = \prod\left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h-1}}\right)^4, \\ K = \frac{\pi}{2}\prod\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2\left(\frac{1-q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2, \end{cases}$$

unmittelbare Ausdrücke für k, k' und K durch q allein. Die erste derselben kann auch zur indirecten Berechnung von q unmittelbar aus k dienen. Schreibt man nämlich diese Formel so:

$$q = \frac{k^2}{16}\prod\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^8,$$

so sieht man, dass, wenn man zuerst in dem unendlichen Product die kleine Grösse q ganz vernachlässigt, $\frac{k^2}{16}$ als der erste Näherungswerth von q zu betrachten ist, mit welchem man die Rechnung durchzuführen und dann dieselbe so lange zu wiederholen hat, bis der resultirende Werth von q keine Aenderung mehr erleidet. Wenn $k > \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, so kann man auch zuerst q' berechnen nach der Formel

$$q' = \frac{k'^2}{16}\prod\left(\frac{1+q'^{2h-1}}{1+q'^{2h}}\right)^8,$$

welche sich aus der vorigen durch Vertauschung von k, q mit k', q' ergiebt, und dann q nach der Formel

$$\log q \log q' = \pi^2 \text{ oder Brigg. Log. } q = \frac{M^2\pi^2}{\text{Brigg. Log. } q'}.$$

Ausser diesen Formeln wird auch noch die Formel

$$(17)\quad \ldots\ldots \quad \frac{2k'K}{\pi} = \prod\left(\frac{1-q^h}{1+q^h}\right)^2$$

sich in der Folge als wichtig erweisen.

Nach Bestimmung der Constanten haben wir nun vollständig*):

$$(18)\quad \sin am\, u = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\sin\frac{\pi u}{2K}\prod_1^\infty{}^h\frac{1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}},$$

*) *Jacobi*, Fundamenta nova. p. 88.

Digitized by Google

$$\cos am u = \frac{2\sqrt{k'}\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} \cos\frac{\pi u}{2K} \prod_1^\infty{}^{(h)} \frac{1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}, \quad (18.a)$$

$$\Delta am u = \sqrt{k'} \prod_1^\infty{}^{(h)} \frac{1+2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}. \quad \cdot \cdot \cdot \quad (18.b)$$

Dreizehnter Abschnitt.

Entwickelung der elliptischen Functionen in Reihen.

§ 58.

Um aus der vorstehenden Entwickelung der elliptischen Functionen in unendliche Producte Entwickelungen in unendliche Reihen abzuleiten, bedient man sich mit Vortheil des Mittels der logarithmischen Differentiation. Nun ist aber

$$\frac{d \log \sin am u}{du} = \frac{\cos am u \, \Delta am u}{\sin am u} = \frac{k' \cos am u}{\cos am (K-u)}, \quad \cdot \cdot \cdot \quad (19)$$

$$\frac{d \log \cos am u}{du} = -\frac{\sin am u \, \Delta am u}{\cos am u} = -\frac{\sin am u}{\sin am (K-u)}, \quad \cdot \quad (19.a)$$

$$\frac{d \log \Delta am u}{du} = -\frac{k^2 \sin am u \cos am u}{\Delta am u}$$

$$= -k^2 \sin am u \sin am (K-u). \quad \cdot \cdot \quad (19.b)$$

Wenn man daher die obigen unendlichen Producte unmittelbar durch den Logarithmus hindurch differentiirt, so erhält man nicht sowohl Reihen für die einfachen elliptischen Functionen selbst, als vielmehr für Combinationen derselben. Man kann aber solche Ausdrücke bilden, welche logarithmisch differentiirt zu den einfachen Functionen führen. Solche sind:

$$\sqrt{\frac{1-\sin am u}{1+\sin am u}}, \quad \sqrt{\frac{1-\cos am u}{1+\cos am u}}, \quad \sqrt{\frac{1-\Delta am u}{1+\Delta am u}}. \quad \cdot \quad (20)$$

Digitized by Google

Es ist nämlich:

$$(21)\quad \frac{d}{du}\left(\log\sqrt{\frac{1-\sin am\,u}{1+\sin am\,u}}\right) = \tfrac{1}{2}\frac{d\log(1-\sin am\,u)}{du} - \tfrac{1}{2}\frac{d\log(1+\sin am\,u)}{du}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\cos am\,u\,\Delta am\,u}{1-\sin am\,u} + \frac{\cos am\,u\,\Delta am\,u}{1+\sin am\,u}\right\}$$

$$= -\frac{\cos am\,u\,\Delta am\,u}{\cos^2 am\,u} = -\frac{\Delta am\,u}{\cos am\,u}$$

$$= -\frac{1}{\sin am(K-u)} = -\operatorname{cosec} am\,(K-u),$$

$$(21.a)\quad \frac{d}{du}\left(\log\sqrt{\frac{1-\cos am\,u}{1+\cos am\,u}}\right) = \frac{\sin am\,u\,\Delta am\,u}{\sin^2 am\,u} = \frac{\Delta am\,u}{\sin am\,u}$$

$$= \frac{k'}{\cos am(K-u)} = k'\sec am(K-u),$$

$$(21.b)\quad \frac{d}{du}\left(\log\sqrt{\frac{1-\Delta am\,u}{1+\Delta am\,u}}\right) = \frac{k^2\sin am\,u\cos am\,u}{k^2\sin^2 am\,u} = \operatorname{cotg} am\,u$$

$$= k'\operatorname{tg} am(K-u).$$

Man erhält also zunächst Reihen für die Functionen

$$\frac{1}{\sin am\,(K-u)},\quad \frac{1}{\cos am\,(K-u)},\quad \operatorname{tg} am\,(K-u).$$

Setzt man in diesen $K-u$ statt u, so gehen sie, abgesehen von den constanten Coefficienten, über in

$$\frac{1}{\sin am\,u},\quad \frac{1}{\cos am\,u},\quad \operatorname{tg} am\,u.$$

Setzt man darin aufs neue $u+iK'$ statt u, so wird man nach den Formeln des § 10 auf

$$\sin am\,u,\ \frac{\sin am\,u}{\Delta am\,u}.\ \text{oder}\ \cos am\,(K-u),\ \frac{1}{\Delta am\,u}$$

geführt, und wenn man noch einmal $K-u$ statt u setzt, auf

$$\sin am\,(K-u),\quad \cos am\,u,\quad \frac{1}{\Delta am\,(K-u)}.$$

Endlich erhält man auch $\Delta am\,u$, wenn man in $\operatorname{cotg} am\,u$ $u+iK'$ statt u setzt.

Um nun aber nach diesem Schema verfahren zu können, müssen zuerst die Ausdrücke (20) in Factoren zerlegt wer-

Digitized by Google

den, damit man sie nach den Formeln (18) in unendliche Producte entwickeln kann.

Aus den Formeln 21) und 22) des § 30 folgt durch Division

$$\frac{1-\sin am\,(u+v)}{1+\sin am\,(u+v)}=\frac{(\cos am\,v-\sin am\,u\;\Delta\,am\,v)^2}{(\cos am\,u+\sin am\,v\;\Delta\,am\,u)^2},$$

und wenn man darin $v=u$ setzt und dann u statt $2u$, also auch $\frac{1}{2}u$ statt u schreibt,

$$\frac{1-\sin am\,u}{1+\sin am\,u}=\left(\frac{\cos am\,\frac{1}{2}u-\sin am\,\frac{1}{2}u\;\Delta\,am\,\frac{1}{2}u}{\cos am\,\frac{1}{2}u+\sin am\,\frac{1}{2}u\;\Delta\,am\,\frac{1}{2}u}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\frac{\cos am\,\frac{1}{2}u}{\Delta\,am\,\frac{1}{2}u}-\sin am\,\frac{1}{2}u}{\frac{\cos am\,\frac{1}{2}u}{\Delta\,am\,\frac{1}{2}u}+\sin am\,\frac{1}{2}u}\right),$$

$$\sqrt{\frac{1-\sin am\,u}{1+\sin am\,u}}=\frac{\sin am\,(\frac{1}{2}u+K)-\sin am\,\frac{1}{2}u}{\sin am\,(\frac{1}{2}u+K)+\sin am\,\frac{1}{2}u}.$$

Wendet man alsdann hierauf die aus den Formeln 4) und 5) des § 30 folgende Relation

$$\frac{\sin am\,(x+y)-\sin am\,(x-y)}{\sin am\,(x+y)+\sin am\,(x-y)}=\frac{\sin am\,y\cos am\,x\;\Delta\,am\,x}{\sin am\,x\cos am\,y\;\Delta\,am\,y}$$

an, indem man

$$x=\tfrac{1}{2}(u+K),\quad y=\tfrac{1}{2}K$$

setzt, so erhält man

$$\sqrt{\frac{1-\sin am\,u}{1+\sin am\,u}}=\frac{\sin am\,\frac{1}{2}K\cos am\,\frac{1}{2}(u+K)\;\Delta\,am\,\frac{1}{2}(u+K)}{\sin am\,\frac{1}{2}(u+K)\cos am\,\frac{1}{2}K\;\Delta\,am\,\frac{1}{2}K},$$

und weil nach § 10

$$\operatorname{tg} am\,\tfrac{1}{2}K=\sqrt{\frac{1}{k'}},\quad \Delta\,am\,\tfrac{1}{2}K=\sqrt{k'}$$

ist,

$$\sqrt{\frac{1-\sin am\,u}{1+\sin am\,u}}=\frac{1}{k'}\,\frac{\cos am\,\frac{1}{2}(u+K)\;\Delta\,am\,\frac{1}{2}(u+K)}{\sin am\,\frac{1}{2}(u+K)}\quad\ldots(22)$$

In ähnlicher Weise erhält man aus 25) und 26) § 30

$$\frac{1-\cos am\,(u+v)}{1+\cos am\,(u+v)}=\left(\frac{\sin am\,u\;\Delta\,am\,v+\sin am\,v\;\Delta\,am\,u}{\cos am\,u+\cos am\,v}\right)^2,$$

Digitized by Google

und wenn man darin $v = u$ und dann $\frac{1}{2}u$ statt u setzt,

$$(23) \quad \cdot \cdot \quad \sqrt{\frac{1 - \cos am\, u}{1 + \cos am\, u}} = \frac{\sin am\, \frac{1}{2}u \, \Delta am\, \frac{1}{2}u}{\cos am\, \frac{1}{2}u}.$$

Endlich erhält man aus 27) und 28) § 30

$$\frac{1 - \Delta am\,(u+v)}{1 + \Delta am\,(u+v)} = \frac{k^2 \sin^2 (am\, u + am\, v)}{(\Delta am\, u + \Delta am\, v)^2},$$

also ebenso wie vorhin auch

$$(24) \quad \cdot \cdot \cdot \quad \sqrt{\frac{1 - \Delta am\, u}{1 + \Delta am\, u}} = \frac{k \sin am\, \frac{1}{2}u \cos am\, \frac{1}{2}u}{\Delta am\, \frac{1}{2}u}.$$

Die in den Formeln (22), (23), (24) enthaltenen Ausdrücke sind nun nach den Gleichungen (18) leicht zu bilden. Zuerst erhält man

$$\frac{\cos am\, u \, \Delta am\, u}{\sin am\, u} = k' \operatorname{cotg} \frac{\pi u}{2K} \prod \frac{1 + 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}}{1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}}$$

$$\times \frac{1 + 2q^{2h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h}}{1 - 2q^{2h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h}},$$

und da die Symbole $2h - 1$ und $2h$ vereint alle ganzen Zahlen, die Symbole $4h - 2$ und $4h$ vereint aber alle geraden Zahlen darstellen,

$$\frac{\cos am\, u \, \Delta am\, u}{\sin am\, u} = k' \operatorname{cotg} \frac{\pi u}{2K} \prod \frac{1 + 2q^{h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{2h}}{1 - 2q^{h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{2h}}.$$

Darin hat man der Gleichung (22) gemäss $\frac{1}{2}(u + K)$ statt u zu setzen, dann ist

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi (u+K)}{4K} = \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi u}{4K} \right) = \sqrt{\frac{1 - \sin \frac{\pi u}{2K}}{1 + \sin \frac{\pi u}{2K}}},$$

$$\cos \frac{\pi (u+K)}{2K} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi u}{2K} \right) = - \sin \frac{\pi u}{2K},$$

also erhält man

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{1-\sin am\,u}{1+\sin am\,u}} &= \sqrt{\frac{1-\sin\frac{\pi u}{2K}}{1+\sin\frac{\pi u}{2K}}}\prod\frac{1-2q^h\sin\frac{\pi u}{2K}+q^{2h}}{1+2q^h\sin\frac{\pi u}{2K}+q^{2h}}.\end{aligned}\right\}\cdot(25)$$

Ebenso ergiebt sich ferner aus (23) und (24) in Verbindung mit (18)

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{1-\cos am\,u}{1+\cos am\,u}} = \operatorname{tg}\frac{\pi u}{4K}\prod &\frac{1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h}}{1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h}}\\ &\times\frac{1+2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h-2}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h-2}}\end{aligned}\right\}(25.a)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{1-\Delta am\,u}{1+\Delta am\,u}} &= 2\sqrt{q}\sin\frac{\pi u}{2K}\prod\frac{1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h-2}}\\ &\times\frac{1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h}}{1+2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h-2}}\end{aligned}\right\}(25.b)$$

Nach diesen Vorbereitungen kann man nun aus den unendlichen Producten durch logarithmische Differentiation Reihen ableiten, und zwar auf doppelte Weise. Nimmt man nämlich auf beiden Seiten die Logarithmen und differentiirt alsdann, so erhält man eine Entwickelung in Partialbrüche ähnlich den im § 35 der „Fundamenta“ unter 6) und 7) gegebenen Entwickelungen, die man auch durch directe Zerlegung der unendlichen Producte in Partialbrüche erhalten kann. Dies auszuführen, nehmen wir hier Abstand. Dagegen werden wir eine zweite Art näher erörtern, die darin besteht, dass man, wenn man die Logarithmen auf beiden Seiten genommen hat, zuerst diese in ihre Reihen auflöst und dann differentiirt. Dabei werden wir aber, da die auszuführenden Operationen sich in ähnlicher Weise bei den verschiedenen Functionen wiederholen, nur einige derselben wirklich entwickeln. Diese Entwickelungen mögen dann als Muster

Digitized by Google

für die übrigen in den „Fundamenten“ gegebenen Formeln dienen. Zuerst behandeln wir die zweite der Gleichungen (18) und (19). Nimmt man in (18.a) auf beiden Seiten den Logarithmus, so erhält man

$$(26)\cdot\quad\begin{cases}\log\cos am\,u = \log\dfrac{2\sqrt{k'}\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} + \log\cos\dfrac{\pi u}{2K}\\ \qquad + \sum_1^\infty \log\left(1 + 2q^{2h}\cos\dfrac{\pi u}{K} + q^{4h}\right)\\ \qquad - \sum_1^\infty \log\left(1 - 2q^{2h-1}\cos\dfrac{\pi u}{K} + q^{4h-2}\right).\end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\pi u}{2K} = x,$$

so ist

$$2\cos\frac{\pi u}{K} = e^{2ix} + e^{-2ix},$$

$$1 + 2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h} = 1 + q^{2h}(e^{2ix} + e^{-2ix}) + q^{4h}$$
$$= (1 + q^{2h}e^{2ix})(1 + q^{2h}e^{-2ix}),$$

$$1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2} = 1 - q^{2h-1}(e^{2ix} + e^{-2ix}) + q^{4h-2}$$
$$= (1 - q^{2h-1}e^{2ix})(1 - q^{2h-1}e^{-2ix}),$$

folglich

$$\log\left(1 + 2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h}\right)$$
$$= \log(1 + q^{2h}e^{2ix}) + \log(1 + q^{2h}e^{-2ix}),$$

$$\log\left(1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}\right)$$
$$= \log(1 - q^{2h-1}e^{2ix}) + \log(1 - q^{2h-1}e^{-2ix}).$$

Entwickelt man nun die Logarithmen in Reihen, indem man hat

$$\log(1 + z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \cdots$$
$$\log(1 - z) = -(z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{4}z^4 + \cdots),$$

so wird

$$\log(1 + q^{2h}e^{2ix})$$
$$= q^{2h}e^{2ix} - \tfrac{1}{2}q^{4h}e^{4ix} + \tfrac{1}{3}q^{6h}e^{6ix} - \tfrac{1}{4}q^{8h}e^{8ix} + \cdots$$

$$\log(1 + q^{2h}e^{-2ix})$$
$$= q^{2h}e^{-2ix} - \tfrac{1}{2}q^{4h}e^{-4ix} + \tfrac{1}{3}q^{6h}e^{6ix} - \tfrac{1}{4}q^{8h}e^{-8ix} + \cdots$$

Digitized by Google

und folglich

$$\log\left(1 + 2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h}\right)$$

$$= 2q^{2h}\cos 2x - \tfrac{2}{2}q^{4h}\cos 4x + \tfrac{2}{3}q^{6h}\cos 6x - \tfrac{2}{4}q^{8h}\cos 8x + \cdots$$

Setzt man jetzt für h alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞ und nimmt die Summe, so erhält man, weil

$$\sum_1^\infty{}_h\, z^h = \frac{z}{1-z}$$

ist,

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^\infty{}_h \log\left(1 + q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h}\right)\\ &= \frac{2q^2}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{2(1-q^4)}\cos 2\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^6}{3(1-q^6)}\cos 3\frac{\pi u}{K} - \cdots\end{aligned}\right\} (27)$$

Ebenso ist

$$\log\left(1 - q^{2h-1}e^{2ix}\right)$$

$$= -\left(q^{2h-1}e^{2ix} + \tfrac{1}{2}q^{4h-2}e^{4ix} + \tfrac{1}{3}q^{6h-3}e^{6ix} + \cdots\right),$$

$$\log\left(1 - q^{2h-1}e^{-2ix}\right)$$

$$= -\left(q^{2h-1}e^{-2ix} + \tfrac{1}{2}q^{4h-2}e^{-4ix} + \tfrac{1}{3}q^{6h-3}e^{-6ix} + \cdots\right),$$

folglich

$$\log\left(1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}\right)$$

$$= -\left(2q^{2h-1}\cos 2x + \tfrac{2}{2}q^{4h-2}\cos 4x + \tfrac{2}{3}q^{6h-3}\cos 6x + \cdots\right),$$

und daher

$$-\sum_1^\infty{}_h \log\left(1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}\right)$$

$$= \frac{2q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{2(1-q^4)}\cos 2\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^3}{3(1-q^6)}\cos 3\frac{\pi u}{K} + \cdots$$

Vereinigt man nun je zwei entsprechende Glieder dieser Reihe und der Reihe (27), so ist

$$\frac{2q^2}{1-q^2} + \frac{2q}{1-q^2} = \frac{2q(1+q)}{1-q^2} = \frac{2q}{1-q},$$

$$-\frac{2q^4}{2(1-q^4)} + \frac{2q^2}{2(1-q^4)} = \frac{2q^2(1-q^2)}{2(1-q^4)} = \frac{2q^2}{2(1+q^2)},$$

$$\frac{2q^6}{3(1-q^6)} + \frac{2q^3}{3(1-q^6)} = \frac{2q^3(1+q^3)}{3(1-q^6)} = \frac{2q^3}{3(1-q^3)},$$

$$-\frac{2q^8}{4(1-q^8)} + \frac{2q^4}{4(1-q^8)} = \frac{2q^4(1-q^4)}{4(1-q^8)} = \frac{2q^4}{4(1+q^4)},$$

Digitized by Google

u. s. w., und folglich erhält man

$$\sum_1^\infty \log\left(1 + 2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h}\right)$$

$$- \sum_1^\infty \log\left(1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}\right) = \frac{2q}{1-q}\cos\frac{\pi u}{K}$$

$$+ \frac{2q^2}{2(1+q^2)}\cos 2\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^3}{3(1-q^3)}\cos 3\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^4}{4(1+q^4)}\cos 4\frac{\pi u}{K} + \cdots,$$

und wenn man dies in (26) substituirt,

$$\log\cos am\, u = \log\frac{2\sqrt[4]{k}\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} + \log\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{2q}{1-q}\cos\frac{\pi u}{K}$$

$$+ \frac{2q^2}{2(1+q^2)}\cos 2\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^3}{3(1-q^3)}\cos 3\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^4}{4(1+q^4)}\cos 4\frac{\pi u}{K} + \cdots.^*)$$

Differentiirt man nun diese Gleichung nach u mit Benutzung der Gleichung (19. a), so erhält man

$$(28)\quad \left\{\begin{matrix}\frac{\sin am\, u\, \Delta am\, u}{\cos am\, u} \\ \frac{\sin am\, u}{\sin am\,(K-u)}\end{matrix}\right\} = \frac{\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} + \frac{\pi}{2K}\left\{\frac{q}{1-q}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1+q^2}\sin 2\frac{\pi u}{K}\right.$$

$$\left. + \frac{q^3}{1-q^3}\sin 3\frac{\pi u}{K} + \frac{q^4}{1+q^4}\sin 4\frac{\pi u}{K} + \cdots\right\}.^{**})$$

Aus dieser und ähnlichen Formeln gehen durch Einsetzen specieller Werthe die im § 40 der „Fundamenta" gegebenen Reihen hervor, von denen wieder nur zwei als Muster abgeleitet werden mögen. Setzt man in vorstehender Reihe $u = \frac{K}{2}$, so wird die linke Seite $= 1$, ferner wird dann

$$\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} = 1, \quad \sin\frac{\pi u}{K} = 1, \quad \sin 2\frac{\pi u}{K} = 0, \quad \sin 3\frac{\pi u}{K} = -1,$$

$$\sin 4\frac{\pi u}{K} = 0, \quad \sin 5\frac{\pi u}{K} = 1, \quad \text{u. s. w.}$$

also ergiebt sich

$$(29)\quad \frac{2K}{\pi} = 1 + 4\left\{\frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \frac{q^7}{1-q^7} + \cdots\right\}.^{***})$$

Von Wichtigkeit ist es auch, eine Reihe für $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2$ zu besitzen. Diese ergiebt sich, wenn man (28) noch einmal nach u differentiirt. Dann erhält man

*) Vgl. Fundamenta. § 39. 7)
**) Fund. § 39. 12)
***) Fund. § 40. 4)

Digitized by Google

$$\Delta^2 am\, u + k'^2 \operatorname{tg}^2 am\, u = \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \left\{ \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi u}{2K}} + 8\left[\frac{q}{1-q}\cos\frac{\pi u}{K}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2q^2}{1+q^2}\cos 2\frac{\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1-q^3}\cos 3\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^4}{1+q^4}\cos 4\frac{\pi u}{K} + \cdots\right]\right\},$$

und wenn man darin $u = 0$ setzt,

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + 8\left[\frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \frac{4q^4}{1+q^4} + \cdots\right]^*). \quad (30)$$

In der nämlichen Weise lassen sich auch die übrigen im § 40 der „Fundamenta" gegebenen Reihen ableiten, worauf wir nicht näher eingehen; vielmehr gehen wir nun dazu über, die einfachen elliptischen Functionen in Reihen zu entwickeln, wobei die Rechnung in zwei Beispielen vollständig durchgeführt werden soll.

§ 59.

Wir schreiten zuerst zur Entwickelung der Gleichung (25) des vorigen §, welche uns, wie das daselbst aufgestellte Schema zeigt, zuletzt auf $\sin am\, u$ führen wird. Setzen wir wieder zur Abkürzung

$$\frac{\pi u}{2K} = x$$

und nehmen in (25) auf beiden Seiten die Logarithmen, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \log \sqrt{\frac{1-\sin am\, u}{1+\sin am\, u}} &= \tfrac{1}{2}\log(1-\sin x) - \tfrac{1}{2}\log(1+\sin x) \\ &\quad + \sum_1^\infty \log \frac{1-2q^h \sin x + q^{2h}}{1+2q^h \sin x + q^{2h}}. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Nun ist aber, da $2\sin x = -i(e^{ix} - e^{-ix})$ ist,

$$\log \frac{1-2q^h \sin x + q^{2h}}{1+2q^h \sin x + q^{2h}} = \log \frac{1+iq^h(e^{ix}-e^{-ix})+q^{2h}}{1-iq^h(e^{ix}-e^{-ix})+q^{2h}}$$

$$= \log \frac{(1+iq^h e^{ix})(1-iq^h e^{-ix})}{(1-iq^h e^{ix})(1+iq^h e^{-ix})} = \log \frac{1+iq^h e^{ix}}{1-iq^h e^{ix}} + \log \frac{1-iq^h e^{-ix}}{1+iq^h e^{-ix}}.$$

Entwickelt man jetzt die Logarithmen nach den Formeln

$$\log \frac{1 \pm z}{1 \mp z} = \pm 2\left\{z + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 + \cdots\right\},$$

*) Fund. § 40. 8).

Digitized by Google

so erhält man

$$\log\frac{1+iq^h e^i}{1-iq^h e^{ix}} = 2i\left\{q^h e^{ix} - \tfrac{1}{3}q^{3h}e^{3ix} + \tfrac{1}{5}q^{5h}e^{5ix} - \tfrac{1}{7}q^{7h}e^{7ix} + \cdots\right\},$$

$$\log\frac{1-iq^h e^{-ix}}{1+iq^h e^{-ix}} = -2i\left\{q^h e^{-ix} - \tfrac{1}{3}q^{3h}e^{-3ix} + \tfrac{1}{5}q^{5h}e^{-5ix} - \tfrac{1}{7}q^{7h}e^{-7ix} + \cdots\right\}$$

und folglich

$$\log\frac{1-2q^h\sin x+q^{2h}}{1+2q^h\sin x+q^{2h}} = -4\left\{q^h\sin x - \tfrac{1}{3}q^{3h}\sin 3x + \tfrac{1}{5}q^{5h}\sin 5x - \tfrac{1}{7}q^{7h}\sin 7x + \cdots\right\},$$

und wenn man die Summe für h von 1 bis ∞ nimmt,

$$\sum_1^\infty \log\frac{1-2q^h\sin x-q^{2h}}{1+2q^h\sin x+q^{2h}} = -4\left\{\frac{q}{1-q}\sin x - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^3}\sin 3x + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1-q^5}\sin 5x - \cdots\right\}.$$

Substituirt man dies in (31), so ergiebt sich

$$\log\sqrt{\frac{1-\sin am\,u}{1+\sin am\,u}} = \tfrac{1}{2}\log(1-\sin x) - \tfrac{1}{2}\log(1+\sin x) - 4\left\{\frac{q}{1-q}\sin x - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^3}\sin 3x + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1-q^5}\sin 5x - \cdots\right\}.$$

Differentiirt man jetzt nach u, indem man bemerkt, dass

$$dx = \frac{\pi}{2K}\,du$$

ist, so erhält man mit Rücksicht auf (21)

$$(32)\quad \frac{1}{\sin am\,(K-u)} = \frac{\pi}{2K}\left\{\frac{1}{\cos\frac{\pi u}{2K}} + \frac{4q}{1-q}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{4q^3}{1-q^3}\cos 3\frac{\pi u}{2K} + \frac{4q^5}{1-p^5}\cos 5\frac{\pi u}{2K} - \cdots\right\}.$$ *)

Für $u = 0$ ergiebt sich daraus wieder die Gleichung (29). Setzt man hingegen $K - u$ statt u, so folgt

*) Fund. § 39. 14).

Digitized by Google

$$\frac{1}{\sin am\, u} = \frac{\pi}{2K}\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi u}{2K}} + \frac{4q}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{4q^3}{1-q^3}\sin 3\frac{\pi u}{2K} + \frac{4q^5}{1-q^5}\sin 5\frac{\pi u}{2K} + \cdots\right\}. \quad (33)$$ *)

Aus dieser Reihe ergiebt sich die für $\sin am\, u$, wenn man $u + iK'$ für u setzt, da nach § 10

$$\frac{1}{\sin am\,(u+iK')} = k \sin am\, u \quad (34)$$

ist. Nun ist

$$\sin\frac{\pi(u+iK')}{2K} = -\tfrac{1}{2}i\left[e^{\frac{\pi(iu-K')}{2K}} - e^{-\frac{\pi(iu-K')}{2K}}\right],$$

oder, wenn man $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ und $x = \frac{\pi u}{2K}$ einführt,

$$\sin\frac{\pi(u+iK')}{2K} = -\tfrac{1}{2}i\,(q^{\frac{1}{2}}e^{ix} - q^{-\frac{1}{2}}e^{-ix}) = \tfrac{1}{2}i\,\frac{1-qe^{2ix}}{\sqrt{q}\,e^{ix}},$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi(u+iK')}{2K}} = -2i\,\frac{\sqrt{q}\,e^{ix}}{1-qe^{2ix}}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck in eine Reihe nach der Formel

$$\frac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + z^7 + \cdots,$$

so erhält man

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi(u+iK')}{2K}} = -2i\left\{\sqrt{q}\,e^{ix} + \sqrt{q^3}\,e^{3ix} + \sqrt{q^5}\,e^{5ix} + \sqrt{q^7}\,e^{7ix} + \cdots\right\}. \quad (35)$$

Die übrigen Glieder der Reihe (33) sind, wenn n eine ungerade Zahl bedeutet, von der Form

$$\frac{4q^n}{1-q^n}\sin n\frac{\pi u}{2K}.$$

Setzt man hier auch $u + iK'$ statt u, so ist

$$\sin n\frac{\pi(u+iK')}{2K} = -\tfrac{1}{2}i\left[e^{\frac{n\pi(iu-K')}{2K}} - e^{-\frac{n\pi(iu-K')}{2K}}\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}i\left(q^{\frac{n}{2}}e^{nix} - q^{-\frac{n}{2}}e^{-nix}\right) = -\tfrac{1}{2}i\left(\sqrt{q^n}\,e^{nix} - \frac{1}{\sqrt{q^n}}e^{-nix}\right).$$

*) Fund. § 39. 18).

Digitized by Google

Demnach

$$(36)\cdot\ \frac{4q^n}{1-q^n}\sin\frac{n\pi(u+iK')}{2K} = -2i\left\{\frac{q^n\sqrt{q^n}}{1-q^n}e^{nix} - \frac{\sqrt{q^n}}{1-q^n}e^{-nix}\right\}.$$

Schreibt man aber die Reihe (35) in folgender Form

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi(u+iK')}{2K}} = -2i\left\{\frac{(1-q)\sqrt{q}}{(1-q)}e^{ix} + \frac{(1-q^3)\sqrt{q^3}}{1-q^3}e^{3ix} + \frac{(1-q^5)\sqrt{q^5}}{1-q^5}e^{5ix} + \cdots\right\},$$

in welcher alle Glieder von der Form

$$-2i\left\{-\frac{q^n\sqrt{q^n}}{1-q^n}e^{nix} + \frac{\sqrt{q^n}}{1-q^n}e^{nix}\right\}$$

sind, so sieht man, dass das erste Glied dieses Ausdrucks sich gegen das erste Glied des Ausdrucks (36) forthebt und das übrig bleibende die Form

$$-2i\frac{\sqrt{q^n}}{1-q^n}(e^{nix} - e^{-nix}) = \frac{4\sqrt{q^n}}{1-q^n}\sin nx$$

annimmt. Da nun für n alle ungeraden Zahlen zu setzen sind, so erhält man mit Rücksicht auf (34) aus (33)

$$(37)\ \cdot\cdot\ \begin{cases}\sin am\,u = \frac{\pi}{2kK}\left\{\frac{4\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{4\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin 3\frac{\pi u}{2K}\right.\\ \qquad\left. + \frac{4\sqrt{q^5}}{1-q^5}\sin 5\frac{\pi u}{2K} + \cdots\right\}.\ ^{*})\end{cases}$$

§ 60.

Ausser den vorigen Reihen wollen wir nur noch die Reihe für $\Delta\, am\, u$ ableiten. Diese geht aus der Entwickelung der Gleichung (25.b) hervor. Wegen (21.b) erhält man nämlich daraus durch die logarithmische Differentiation $\operatorname{cotg} am\, u$, und dann, indem man $u + iK'$ für u setzt, $\Delta\, am\, u$.

Nimmt man in der Gleichung (25.b) auf beiden Seiten den Logarithmus, so erhält man

*) Fund. § 39. 19).

Digitized by Google

$$\log\sqrt{\frac{1-\Delta am\, u}{1+\Delta am\, u}} = \log 2\sqrt{q} + \log\sin\frac{\pi u}{2K}$$
$$+ \sum_1^\infty \Big\{\log(1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h}) + \log(1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h})$$
$$- \log(1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h-2})$$
$$- \log(1+2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h-2})\Big\}.$$

Setzt man zur Abkürzung wieder $\frac{\pi u}{2K} = x$, so wird

$$2\cos\frac{\pi u}{2K} = e^{ix} + e^{-ix},$$

und dann

$$\left.\begin{aligned}\log\sqrt{\frac{1-\Delta am\, u}{1+\Delta am\, u}} &= \log 2\sqrt{q} + \log\sin x\\ &+ \sum_1^\infty \Big\{\log(1-q^{2h}e^{ix}) + \log(1-q^{2h}e^{-ix})\\ &+ \log(1+q^{2h}e^{ix}) + \log(1+q^{2h}e^{-ix})\\ &- \log(1-q^{2h-1}e^{ix}) - \log(1-q^{2h-1}e^{-ix})\\ &- \log(1+q^{2h-1}e^{ix}) - \log(1+q^{2h-1}e^{-ix})\Big\}.\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Entwickelt man jetzt die sämmtlichen Logarithmen in Reihen nach den Formeln

$$\log(1-z) = -\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda} z^\lambda,$$

$$\log(1+z) = -\sum_1^\infty (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda} z^\lambda,$$

so ist

$$\log(1-q^{2h}e^{ix}) + \log(1-q^{2h}e^{-ix}) = -\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda} q^{2\lambda h}(e^{\lambda ix}+e^{-\lambda ix}),$$

$$\log(1+q^{2h}e^{ix}) + \log(1+q^{2h}e^{-ix}) = -\sum_1^\infty \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} q^{2\lambda h}(e^{\lambda ix}+e^{-\lambda ix}),$$

$$-\log(1-q^{2h-1}e^{ix}) - \log(1-q^{2h-1}e^{-ix}) = +\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda} q^{2\lambda h-\lambda}(e^{\lambda ix}+e^{-\lambda ix}),$$

Digitized by Google

$$-\log(1+q^{2h-1}e^{ix})-\log(1+q^{2h-1}e^{-ix})$$
$$=+\sum_1^\infty{}_\lambda \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} q^{2\lambda h-\lambda}(e^{\lambda ix}+e^{-\lambda ix}).$$

Addirt man diese Gleichungen, so heben sich alle Glieder, bei welchen λ ungerade Zahlen sind, auf, und alle Glieder, bei welchen λ gerade Zahlen sind, kommen doppelt vor; die übrigbleibenden geben daher, wenn man die Exponentialgrössen zugleich in Cosinus verwandelt,

$$-\frac{4}{\lambda}q^{2\lambda h}\cos\lambda x+\frac{4}{\lambda}q^{2\lambda h-\lambda}\cos\lambda x,$$

worin für λ alle geraden Zahlen von 2 an zu setzen sind. Setzt man daher $\lambda=2n$, so sind für n alle ganzen Zahlen von 1 an zu setzen, und die Summe obiger 8 Logarithmen liefert:

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{4}{2n}\left(-q^{4nh}+\frac{q^{4nh}}{q^{2n}}\right)\cos 2nx=\sum_1^\infty{}_n \frac{4}{2n}\frac{1-q^{2n}}{q^{2n}}q^{4nh}\cos 2nx,$$

wovon der Gleichung (38) gemäss die Summe in Bezug auf h von 1 bis ∞ zu nehmen ist. Da nun

$$\sum_1^\infty{}_h q^{4nh}=\frac{q^{4n}}{1-q^{4n}}$$

ist, so erhält man, wenn man die Summation in Bezug auf h ausführt,

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{4}{2n}\frac{1-q^{2n}}{q^{2n}}\cdot\frac{q^{4n}}{1-q^{4n}}\cos 2nx=\sum_1^\infty{}_n \frac{4}{2n}\cdot\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\cos 2nx,$$

und demgemäss ist

$$\log\sqrt{\frac{1-\Delta am\,u}{1+\Delta am\,u}}=\log 2\sqrt{q}+\log\sin x+4\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{2n}\cdot\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\cos 2nx$$
$$=\log 2\sqrt{q}+\log\sin x+4\left\{\tfrac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\cos 2x+\tfrac{1}{4}\frac{q^4}{1+q^4}\cos 4x\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{6}\frac{q^6}{1+q^6}\cos 6x+\cdots\right\}.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach u, indem

$$dx=\frac{\pi}{2K}du$$

ist, so erhält man wegen (21.b)

Digitized by Google

$$\operatorname{cotg} am\, u = \frac{\pi}{2K}\left\{\operatorname{cotg} x - 4\sum_1^\infty{}_n \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} \sin 2nx\right\}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cotg} am\, u = \frac{\pi}{2K}\Big\{&\operatorname{cotg}\frac{\pi u}{2K} - \frac{4q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1+q^4}\sin 2\frac{\pi u}{K}\\ &- \frac{4q^6}{1+q^6}\sin 3\frac{\pi u}{K} \cdots\Big\}.\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

In dieser Gleichung hat man $u + iK'$ für u zu setzen, um $\Delta\, am\, u$ zu erhalten; denn nach § 10 ist

$$\operatorname{cotg} am\,(u + iK') = -\, i\, \Delta\, am\, u.$$

Setzt man also $\frac{\pi(u+iK')}{2K} = x_1$ und $\frac{\pi u}{2K} = x$, so erhält man

$$-\, i\, \Delta\, am\, u = \frac{\pi}{2K}\left\{\operatorname{cotg} x_1 - 4\sum_1^\infty{}_n \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} \sin 2nx_1\right\}. \quad (40)$$

Nun ist

$$x_1 = \frac{\pi u}{2K} + \frac{\pi iK'}{2K} = \frac{\pi iK'}{2K} + x,$$

also

$$ix_1 = -\frac{\pi K'}{2K} + ix,$$

$$e^{2ix_1} = qe^{2ix}, \quad e^{-2ix_1} = \frac{1}{q}e^{-2ix},$$

folglich

$$\sin 2nx_1 = -\tfrac{1}{2}i(e^{2nix_1} - e^{-2nix_1}) = -\tfrac{1}{2}i(q^n e^{2nix} - \frac{1}{q^n}e^{-2nix})$$

$$-\frac{4q^{2n}}{1+q^{2n}}\sin 2nx_1 = +2i\left(\frac{q^{3n}}{1+q^{2n}}e^{2nix} - \frac{q^n}{1+q^{2n}}e^{-2nix}\right)$$

und

$$\left.\begin{aligned}&-4\sum_1^\infty{}_n \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\sin 2nx_1\\ &= +2i\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{q^{3n}}{1+q^{2n}}e^{2nix} - \frac{q^n}{1+q^{2n}}e^{-2nix}\right).\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Ferner ist

$$\operatorname{cotg} x_1 = -\, i\,\frac{1+e^{2ix_1}}{1-e^{2ix_1}} = -\, i\,\frac{1+qe^{2ix}}{1-qe^{2ix}},$$

Digitized by Google

und weil

$$\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\,(z + z^2 + z^3 + \cdots) = 1 + 2\sum_1^\infty{}_n\, z^n$$

ist,

$$\operatorname{cotg} x_1 = -\,i\left\{1 + 2\sum_1^\infty{}_n\, q^n\, e^{2nix}\right\},$$

oder auch

$$\operatorname{cotg} x_1 = -\,i\left\{1 + 2\sum_1^\infty{}_n\, \frac{(1+q^{2n})\,q^n}{1+q^{2n}}\, e^{2nix}\right\}$$

$$= -\,i\left\{1 + 2\sum_1^\infty{}_n\, \frac{q^n}{1+q^{2n}}\, e^{2nix} + 2\sum_1^\infty{}_n\, \frac{q^{3n}}{1+q^{2n}}\, e^{2nix}\right\}.$$

Addirt man nun dieses zu (41), um den Ausdruck (40) herzustellen, so hebt sich das Glied

$$2i\sum \frac{q^{3n}}{1+q^{2n}}\, e^{2nix}$$

fort, und man erhält mit Fortlassung des beiden Seiten gemeinschaftlichen Factors $-\,i$:

$$\Delta\, am\, u = \frac{\pi}{2K}\left\{1 + 2\sum_1^\infty{}_n\, \frac{q^n}{1+q^{2n}}\,(e^{2nix} + e^{-2nix})\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2K}\left\{1 + 4\sum_1^\infty{}_n\, \frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos 2nx\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2K}\left\{1 + 4\sum_1^\infty{}_n\, \frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos\frac{n\pi u}{K}\right\},$$

(42)
$$\left\{\Delta\, am\, u = \frac{\pi}{2K}\left\{1 + \frac{4q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^2}{1+q^4}\cos 2\frac{\pi u}{K}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{4q^3}{1+q^6}\cos 3\frac{\pi u}{K} + \cdots\right\}\right.^{*}).$$

Diese Reihe hat noch besondere Wichtigkeit dadurch, dass man aus ihr durch Integration eine Reihe für $am\,u$ ableiten kann. Denn da

$$\frac{d\, am\, u}{du} = \Delta\, am\, u$$

ist, so erhält man

*) Fund. § 39. 25).

Digitized by Google

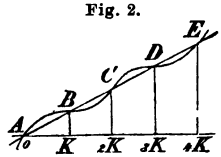
$$am\, u = \int_0^u \Delta\, am\, u\, du.$$

Demnach ergiebt sich

$$am\, u = \frac{\pi u}{2K} + \frac{2q}{1+q^2} \sin \frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{2(1+q^4)} \sin 2\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^3}{3(1+q^6)} \sin 3\frac{\pi u}{K} + \cdots\cdots *). \quad (43)$$

Diese Reihe bestätigt die in § 7 gemachten Bemerkungen über die Beschaffenheit der Function $am\, u$. Sie besteht nämlich aus einem mit u proportional wachsenden Gliede $\frac{\pi u}{2K}$, welches die durch die Punkte A, B, C, etc. hindurchgehende Gerade darstellt, und einem periodischen Theile, durch welchen bewirkt wird, dass die Curve für $am\, u$ sich wellenförmig um die erwähnte Gerade schlingt.

Fig. 2.



§ 61.

Durch Rechnungen, welche den im Vorigen ausgeführten sehr ähnlich sind, können nun nach Anleitung des S. 234 aufgestellten Schema's auch die übrigen elliptischen Functionen in Reihen entwickelt werden**). Wir übergehen diese Rechnungen und stellen nur die wichtigsten Reihen in Folgendem zusammen:

$$\sin am\, u = \frac{\pi}{2kK}\left\{\frac{4\sqrt{q}}{1-q} \sin \frac{\pi u}{2K} + \frac{4\sqrt{q^3}}{1-q^3} \sin 3\frac{\pi u}{2K} + \frac{4\sqrt{q^5}}{1-q^5} \sin 5\frac{\pi u}{2K} + \cdots\right\},$$

*) Fund. § 39. 24).

**) Die directesten Methoden der Reihenentwickelung für die elliptischen Functionen liefert die Theorie der Functionen complexer Variablen. Wir verweisen in dieser Beziehung auf *Briot* et *Bouquet*, Théorie des fonctions doublement périodiques, und *L. Königsberger*, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. Ausserdem hat *Schlömilch* eine directe Art der Entwickelung gegeben, welche auf einer Anwendung der Reihen von *Lagrange* und *Fourier* auf Functionen mit complexem Argument beruht (Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. Abhandlungen der k. sächs. Akademie der Wissensch. Bd. 4). Vgl. auch *Schlömilch*, Compendium der höheren Analysis. Bd. 2.

Digitized by Google

$$\cos am\, u = \frac{\pi}{2kK}\left\{\frac{4\sqrt{q}}{1+q}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{4\sqrt{q^3}}{1+q^3}\cos 3\frac{\pi u}{2K} + \frac{4\sqrt{q^5}}{1+q^5}\cos 5\frac{\pi u}{2K} + \cdots\right\},$$

$$\Delta am\, u = \frac{\pi}{2K}\left\{1 + \frac{4q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^2}{1+q^4}\cos 2\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^3}{1+q^6}\cos 3\frac{\pi u}{K} + \cdots\right\},$$

$$tg\, am\, u = \frac{\pi}{2k'K}\left\{tg\frac{\pi u}{2K} - \frac{4q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^4}{1+q^4}\sin 2\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^6}{1+q^6}\sin 3\frac{\pi u}{K} + \cdots\right\},$$

$$am\, u = \frac{\pi u}{2K} + \frac{2q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{2(1+q^4)}\sin 2\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^3}{3(1+q^6)}\sin 3\frac{\pi u}{K} + \cdots,$$

$$\frac{1}{\sin am\, u} = \frac{\pi}{2K}\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi u}{2K}} + \frac{4q}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{4q^3}{1-q^3}\sin 3\frac{\pi u}{2K} + \frac{4q^5}{1-q^5}\sin 5\frac{\pi u}{2K} + \cdots\right\},$$

$$\frac{1}{\cos am\, u} = \frac{\pi}{2k'K}\left\{\frac{1}{\cos\frac{\pi u}{2K}} - \frac{4q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{4q^3}{1+q^3}\cos 3\frac{\pi u}{2K} - \frac{4q^5}{1+q^5}\cos 5\frac{\pi u}{2K} + \cdots\right\},$$

$$\frac{1}{\Delta am\, u} = \frac{\pi}{2k'K}\left\{1 - \frac{4q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^2}{1+q^4}\cos 2\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^3}{1+q^6}\cos 3\frac{\pi u}{K} + \cdots\right\},$$

$$\operatorname{cotg} am\, u = \frac{\pi}{2K}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\pi u}{2K} - \frac{4q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1+q^4}\sin 2\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^6}{1+q^6}\sin 3\frac{\pi u}{K} - \cdots\right\}.$$

Zur Ermittelung des Werthes von q für einen gegebenen Modul k existiren bereits Tafeln; eine kleinere hat *Jacobi* der im 26ten Bande des Crelle'schen Journals enthaltenen Abhandlung: „Zur Theorie der elliptischen Functionen" beigefügt; eine ausgedehntere Tafel für q enthält die erste

Digitized by Google

Lieferung von *Meissel*'s Sammlung mathematischer Tafeln (Iserlohn 1860)*).

Ein ausgezeichnetes Hülfsmittel zum Uebergange von einer elliptischen Function zu einer andern bietet auch die Verwandlung von q in $-q$ dar. Dann wird aber der Modul imaginär, denn da

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

für alle reellen Werthe von k und k' positiv bleibt, so ist ersichtlich, dass es nur für imaginäre Moduln negativ werden kann. Nun haben wir § 24 gesehen, dass die Verwandlung von k in $\frac{1}{k}$ den Uebergang von k' in $\frac{ik'}{k}$, von K in $k(K+iK')$ und von K' in kK' nach sich zieht. Vertauscht man darin k mit k', so folgt auch, dass gleichzeitig

$$\begin{aligned} k &\text{ in } \frac{ik}{k'} \\ k' &\text{ „ } \frac{1}{k'} \\ K &\text{ „ } k'K \\ K' &\text{ „ } k'(K'+iK) \end{aligned}$$

übergehen. Setzt man also $\frac{ik}{k'}$ statt k, so verwandelt sich $-\pi\frac{K'}{K}$ in $-\pi\frac{k'(K+iK)}{k'K} = -\pi\frac{K'}{K} - i\pi$, mithin

$$q \text{ in } e^{-\pi\frac{K'}{K}}e^{-i\pi},$$

oder weil

$$e^{-i\pi} = -1$$

ist, in $-q$. Demnach entsteht $-q$ aus q dann, wenn k in $\frac{ik}{k'}$ übergeht. Vertauscht man nun auch in den letzten Formeln auf S. 94 k mit k', so verwandeln sich dieselben in folgende:

---

*) Ausserdem sind als Hülfsmittel zur Berechnung elliptischer Functionen anzuführen:

Gronau, Tafeln für die trigonom. Funct. der cyclischen und hyperbolischen Sectoren. Danzig 1863. (Aus den Schriften der naturf. Ges. in Danzig. Neue Folge. Bd. 1.)

Hoüel, Recueil de formules et de tables numériques. Paris 1866.

Digitized by Google

$$\sin am\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{k' \sin am\, u}{\Delta\, am\, u} = \cos am\,(K - u),$$

$$\cos am\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{\cos am\, u}{\Delta\, am\, u} = \sin am\,(K - u),$$

$$\Delta\, am\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{\Delta\, am\, u} = \frac{1}{k'}\,\Delta\, am\,(K - u),$$

$$\operatorname{tg} am\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = k' \operatorname{tg} am\, u = \operatorname{cotg} am\,(K - u).$$

Diese Formeln zeigen, welche elliptische Functionen durch die obigen Reihen dargestellt werden, wenn man in diesen $-q$ für q setzt. Wenn man nämlich gleichzeitig auch u in $k'u$ übergehen lässt, so bleibt der in sämmtlichen Reihen vorkommende Ausdruck $\frac{\pi u}{K}$ ungeändert, denn aus K wird $k'K$, folglich aus $\frac{\pi u}{K}$

$$\frac{\pi k' u}{k' K} = \frac{\pi u}{K}.$$

Man hat daher wirklich in den Reihen nichts anderes zu verändern, als q in $-q$ übergehen zu lassen, und nur bei dem vor den Reihen stehenden Factor auf die Vertauschung Rücksicht zu nehmen. Auf diese Weise entsteht z. B. aus der Reihe für $\Delta\, am\, u$ sogleich die für $\frac{1}{\Delta\, am\, u}$.

Vierzehnter Abschnitt.

Reihenentwickelung für die zweite Gattung.

§ 62.

Die elliptische Transcendente der zweiten Gattung, $E(u)$, war nach § 19

$$E(u) = \int_0^u \Delta^2\, am\, u\, du = \int_0^u (1 - k^2 \sin^2 am\, u)\, du.$$

Es kommt daher darauf an, eine Reihe für $\sin^2 am\, u$ herzustellen. Diese hat *Jacobi* durch Quadrirung der Reihe (37)

Digitized by Google

§ 59 für sin *am u* ermittelt*). Setzt man wie früher $\frac{\pi u}{2K} = x$, so kann man die Reihe (37) schreiben

$$\sin am u = \frac{4\pi\sqrt{q}}{2kK}\left\{\frac{1}{1-q}\sin x + \frac{q}{1-q^3}\sin 3x + \frac{q^2}{1-q^5}\sin 5x + \cdots + \frac{q^{h-1}}{1-q^{2h-1}}\sin(2h-1)x + \cdots\right\}. \quad (1)$$

Durch Multiplicirung dieser Reihe mit sich selbst erhält man lauter Producte von der Form $\sin mx \sin px$, wenn unter m und p ungerade Zahlen verstanden werden. Nun ist

$$\sin(y+z)\sin(y-z) = \sin^2 y - \sin^2 z,$$

also wenn man $y+z = mx$, $y-z = px$ und daher $y = \frac{m+p}{2}x$, $z = \frac{m-p}{2}x$ setzt,

$$\sin mx \sin px = \sin^2\frac{m+p}{2}x - \sin^2\frac{m-p}{2}x, \quad \cdots (2)$$

worin, da m und p alle ungeraden Zahlen bedeuten, $m+p$ und $m-p$ alle geraden Zahlen, $\frac{m+p}{2}$ alle ganzen Zahlen (exclusive 0), und $\frac{m-p}{2}$ auch alle ganzen Zahlen (inclusive 0) bedeuten werden. Die Quadrirung der Reihe für sin *am u* wird daher die Differenz zweier Reihen liefern, von welchen jede die Quadrate der Sinus aller Vielfachen von x enthält; also wird die Reihe für $\sin^2 am u$ folgende Form annehmen:

$$\sin^2 am u = \left(\frac{4\pi\sqrt{q}}{2kK}\right)^2\left\{\begin{array}{r} A_1\sin^2 x + A_2\sin^2 2x + A_3\sin^2 3x \\ + \cdots + A_n\sin^2 nx + \cdots \\ -B_1\sin^2 x - B_2\sin^2 2x - B_3\sin^2 3x \\ - \cdots - B_n\sin^2 nx - \cdots \end{array}\right\} \quad (3)$$

worin die Coefficienten A und B zu bestimmen sein werden. Um den Coefficienten A_n zu bestimmen, setzen wir $\frac{m+p}{2} = n$, sodass $p = 2n - m$, $m = 2n - p$ ist, und können dann leicht ermitteln, welche zusammengehörigen Werthe von m und p zur Bildung der Zahl n beitragen. Es wird nämlich

für $m = 1$	$p = 2n - 1$
$m = 3$	$p = 2n - 3$
$m = 5$	$p = 2n - 5$
.....	.....
$m = 2n - 1$	$p = 1$.

*) Fund. § 41.

Digitized by Google

Dies zeigt, dass zur Bildung von n nur die endliche Anzahl der Werthe 1, 3, 5, ... $2n-1$ von m beiträgt, weil für grössere Werthe von m keine entsprechenden Werthe von p mehr vorhanden sind. Ausserdem sieht man, dass jedes Paar zusammengehöriger Werthe von m und p, z. B. 1, $2n-1$; 3, $2n-3$; etc. doppelt (das zweite Mal nur in umgekehrter Ordnung) vorkommt, mit Ausnahme desjenigen Paares, bei welchem $m=p$ ist. Da nun $\sin mx$ und $\sin px$ resp. die Coefficienten $\frac{q^{\frac{m-1}{2}}}{1-q^m}$ und $\frac{q^{\frac{p-1}{2}}}{1-q^p}$ haben, so kann man den Coefficienten A_n von $\sin nx$ aus den Coefficienten der Reihe (1) mit Berücksichtigung von (2) sogleich bilden. Nämlich man erhält

$$(4)\cdot\quad A_n=\frac{1}{1-q}\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n-1}}+\frac{q}{1-q}\frac{q^{n-2}}{1-q^{2n-3}}+\cdots\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n-1}}\frac{1}{1-q}.$$

Setzt man zweitens zur Bildung des Coefficienten B_n

$$\frac{m-p}{2}=n,$$

so ist $m=2n+p$, also wird

für $p=1$	$m=2n+1$
$p=3$	$m=2n+3$
$p=5$	$m=2n+5$
.....	.....

Hier tragen also zur Bildung der Zahl n alle Werthe von p: 1, 3, 5, 7, ... bis ins Unendliche bei. Quadrate kommen hier nicht vor, da niemals $p=m$ sein kann; die Producte sind daher alle zu verdoppeln und man wird erhalten

$$(5)\cdot\quad\begin{cases}B_n=2\left\{\frac{1}{1-q}\cdot\frac{q^n}{1-q^{2n+1}}+\frac{q}{1-q^3}\cdot\frac{q^{n+1}}{1-q^{2n+3}}\right.\\ \qquad\left.+\frac{q^2}{1-q^5}\cdot\frac{q^{n+2}}{1-q^{2n+5}}+\cdots\right\}.\end{cases}$$

Der vollständige Coefficient von $\sin^2 nx$ in der Reihe (3) ist alsdann

$$A_n-B_n.$$

Um denselben auf seine einfachste Gestalt zu bringen, schreibe man die Gleichung (4) zunächst so:

$$A_n=q^{n-1}\left\{\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q^{2n-1}}+\frac{1}{1-q^3}\cdot\frac{1}{1-q^{2n-3}}\right.$$
$$\left.+\cdots\frac{1}{1-q^{2n-1}}\cdot\frac{1}{1-q}\right\},$$

Digitized by Google

und transformire jedes einzelne Glied nach der identischen Gleichung

$$\frac{1}{1-y}\cdot\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-yz}\left\{\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}+1\right\},$$

so erhält man

$$A_n=\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n}}\left\{\left(\frac{q}{1-q}+\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}+1\right)+\left(\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^{2n-3}}{1-q^{2n-3}}+1\right)\right.$$
$$\left.+\cdots\left(\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}+\frac{q}{1-q}+1\right)\right\}.$$

Da aber in den in Klammern geschlossenen Ausdrücken die ersten Glieder dieselben sind, wie die zweiten, nur in umgekehrter Ordnung, und die Anzahl aller Glieder $= n$ ist, so folgt

$$A_n=\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n}}\left\{n+2\left(\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}+\cdots+\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\right)\right\}. \quad (6)$$

Zur Umformung von B_n schreibe man die Gleichung (5)

$$B_n=2q^{n-1}\left\{\frac{q}{(1-q)(1-q^{2n+1})}+\frac{q^3}{(1-q^3)(1-q^{2n+3})}\right.$$
$$\left.+\frac{q^5}{(1-q^5)(1-q^{2n+5})}+\cdots\right\}$$

und benutze die identische Gleichung

$$\frac{y}{(1-y)(1-z)}=\frac{1}{1-\frac{z}{y}}\left(\frac{y}{1-y}-\frac{z}{1-z}\right),$$

so erhält man

$$B_n=\frac{2q^{n-1}}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}+\cdots+\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}+\cdots\right.$$
$$\left.-\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}-\frac{q^{2n+3}}{1-q^{2n+3}}-\frac{q^{2n+5}}{1-q^{2n+5}}-\cdots\right\},$$

welche Reihe zeigt, dass von dem Gliede $\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}$ an alle Glieder sich zerstören, sodass sie eine endliche Reihe wird, nämlich

$$B_n=\frac{2q^{n-1}}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}+\cdots+\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\right\}.$$

Subtrahirt man nun dies von (6), so ergiebt sich schliesslich

$$A_n-B_n=\frac{nq^{n-1}}{1-q^{2n}}.$$

Digitized by Google

Nun ist nach (3)

$$\sin^2 am\, u = \left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2 16\, q \sum_1^\infty{}^n (A_n - B_n) \sin^2 nx,$$

also erhält man

$$\sin^2 am\, u = \left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2 16 \sum_1^\infty{}^n \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \sin^2 \frac{n\pi u}{2K}$$

$$= 16 \left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2 \left\{\frac{q}{1-q^2} \sin^2 \frac{\pi u}{2K} + \frac{2q^2}{1-q^4} \sin^2 \frac{2\pi u}{2K} + \frac{3q^3}{1-q^6} \sin^2 \frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right\}.$$

Darin kann man noch statt der Quadrate der Sinus die Cosinus einführen, indem

$$\sin^2 nx = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2nx)$$

ist; dann erhält man

$$\sin^2 am\, u = 8 \left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2 \sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \left(1 - \cos \frac{n\pi u}{K}\right),$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(7) \cdot \quad C = 8 \sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} = 8 \left\{\frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \cdots\right\}$$

setzt,

$$(8) \begin{cases} \sin^2 am\, u = \left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2 \left\{C - 8 \sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos \frac{n\pi u}{K}\right\} \\ \quad = \left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2 \left\{C - 8 \left[\frac{q}{1-q^2} \cos \frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1-q^4} \cos \frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1-q^6} \cos \frac{3\pi u}{K} + \cdots\right]\right\}. \end{cases}$$

Anmerkung. Aus $\sin^2 am\, u$ erhält man auch eine Reihe für $\frac{1}{\sin^2 am\, u}$, wenn man $\log \sin am\, u$ zweimal nach u differentiirt, denn man hat

$$\frac{d^2 \log \sin am\, u}{du^2} = k^2 \sin^2 am\, u - \frac{1}{\sin^2 am\, u},$$

also

$$\frac{1}{\sin^2 am\, u} = k^2 \sin^2 am\, u - \frac{d^2 \log \sin am\, u}{du^2}.$$

Man braucht also nur die Reihe für $\log \sin am\, u$ zweimal nach u zu differentiiren und von der Reihe (8) abzuziehen, um eine Reihe für $\frac{1}{\sin^2 am\, u}$ zu erhalten. (Vgl. Fundamenta § 42.)

Digitized by Google

§ 63.

Vermittelst der Reihe (8) erhält man nun sofort eine Reihe für $E(u)$; denn zunächst wird

$$\Delta^2 am\, u = 1 - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \left\{C - 8\sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos\frac{n\pi u}{K}\right\},$$

und daraus ergiebt sich durch Integration

$$E(u) = \left[1 - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 C\right] u + \frac{4\pi}{2K}\sum \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin\frac{n\pi u}{K} \cdot \cdot \cdot \quad (9)$$

Setzt man darin zunächst $u = K$, so erhält man auch eine Reihe für das vollständige Integral der zweiten Gattung $E(K)$ oder E. Es verschwindet nämlich der unter dem Zeichen Σ stehende Ausdruck, und man erhält

$$E = \left[1 - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 C\right] K, \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (10)$$

oder, wenn man für C seine Reihe (7) substituirt,

$$E = K - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 8K \left\{\frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \cdots\right\} \cdot \quad (11)$$

Hiedurch ist ein Mittel gegeben, E aus k mit Hülfe von q und K zu berechnen.

Nimmt man nun E als bekannt an, so kann man auch C durch E ersetzen, denn da aus (10) folgt

$$1 - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 C = \frac{E}{K},$$

so erhält man aus (9)

$$E(u) = \frac{E}{K} u + \frac{4\pi}{2K}\sum \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin\frac{n\pi u}{K} \cdot \cdot \quad (12)$$

Den periodischen Theil dieses Ausdrucks hat *Jacobi**) als eine neue Function eingeführt und mit Z bezeichnet, indem er setzte

$$Z(u) = \frac{4\pi}{2K}\sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin\frac{n\pi u}{K}$$

$$= \frac{4\pi}{2K}\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \cdots\right\}, \cdot \quad (13)$$

*) Fundamenta, § 47.

Digitized by Google

welche die Stelle der Transcendenten $E(u)$ vertritt und mit ihr, wie aus (12) folgt, durch die Relation

$$(14) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad E(u) = \frac{E}{K} u + Z(u)$$

verbunden ist. Man bemerke zugleich die Formeln

$$Z(0) = 0, \quad Z(K) = 0,$$
$$Z(u + 2K) = Z(u),$$
$$Z(-u) = -Z(u).$$

Führt man auch in (8) die Grösse E statt C ein, indem aus (10)

$$C = \left(1 - \frac{E}{K}\right)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = \frac{4K}{\pi^2}(K - E)$$

folgt, so erhält man

$$(15) \cdot \sin^2 am\, u = \left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2 \left\{\frac{4K}{\pi^2}(K-E) - 8\sum_1^\infty \frac{n q^n}{1-q^{2n}} \cos\frac{n\pi u}{K}\right\}.$$

Fünfzehnter Abschnitt.

Reihenentwickelung für die dritte Gattung.

§ 64.

Die elliptische Transcendente der dritten Gattung ist nach *Jacobi*'s Bezeichnung (§ 21)

$$\Pi(u, a) = \int_0^u \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a \,\Delta am\, a \sin^2 am\, u\, du}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u}.$$

Durch zweimalige Differentiation derselben nach u wird man auf schon früher in Reihen entwickelte Ausdrücke geführt. Man hat nämlich

$$(16) \cdot \cdot \frac{d\Pi(u, a)}{du} = \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a \,\Delta am\, a \sin^2 am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u},$$

und wenn man noch einmal differentiirt,

$$\frac{d^2\Pi(u, a)}{du^2} = \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a \,\Delta am\, a}{(1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u)^2}$$
$$\times \{(1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u)\, 2 \sin am u \cos am u \,\Delta am u$$
$$+ 2k^2 \sin^2 am\, a \sin^3 am\, u \cos am\, u \,\Delta am\, u\}$$
$$= 2k^2 \frac{\sin am\, a \cos am\, u \,\Delta am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u} \cdot \frac{\sin am\, u \cos am\, a \,\Delta am\, a}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u},$$

Digitized by Google

und daher erhält man nach den Formeln 4) und 5) des § 30

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Pi(u,a)}{du^2} &= \tfrac{1}{2}k^2\left\{\sin am(u+a) - \sin am(u-a)\right\}\\ &\quad\times\left\{\sin am(u+a) + \sin am(u-a)\right\}\\ &= \tfrac{1}{2}k^2\left\{\sin^2 am(u+a) - \sin^2 am(u-a)\right\},\end{aligned}\quad\cdot\ (17)$$

auf welchen Ausdruck man sogleich die Reihe (15) anwenden kann, indem man darin einmal $u+a$ und dann $u-a$ statt u setzt, beide Ausdrücke von einander abzieht und mit $\frac{1}{2}k^2$ multiplicirt. Dadurch ergiebt sich:

$$\frac{d^2\Pi(u,a)}{du^2} = \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 4\sum_1^\infty \frac{nq^n}{1-q^{2n}}\left(\cos\frac{n\pi(u-a)}{K} - \cos\frac{n\pi(u+a)}{K}\right).$$

Integrirt man jetzt zwischen den Grenzen 0 und u, weil, wie aus (16) hervorgeht, $\frac{d\Pi(u,a)}{du}$ für $u=0$ verschwindet, so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi(u,a)}{du} &= \frac{\pi}{2K}2\sum\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left(\sin\frac{n\pi(u-a)}{K} - \sin\frac{n\pi(u+a)}{K}\right)\\ &\quad+\frac{\pi}{2K}4\sum\frac{q^n}{1-q^{2n}}\sin\frac{n\pi a}{K},\end{aligned}$$

und wenn man nochmals, wiederum zwischen den Grenzen 0 und u, integrirt,

$$\begin{aligned}\Pi(u,a) &= \frac{4\pi}{2K}u\sum\frac{q^n}{1-q^{2n}}\sin\frac{n\pi a}{K}\\ &\quad-\sum\frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\left(\cos\frac{n\pi(u-a)}{K} - \cos\frac{n\pi(u+a)}{K}\right)\\ &= \frac{4\pi}{2K}u\sum\frac{q^n}{1-q^{2n}}\sin\frac{n\pi a}{K}\\ &\quad-2\sum\frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\sin\frac{n\pi u}{K}\sin\frac{n\pi a}{K}.\end{aligned}$$

In diesem Ausdrucke ist das erste Glied nach der durch die Gleichung (13) gegebenen Definition der Function Z nichts anderes als $uZ(a)$, folglich hat man auch

$$\left.\begin{aligned}\Pi(u,a) &= uZ(a) - \sum_1^\infty\frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\left(\cos\frac{n\pi(u-a)}{K} - \cos\frac{n\pi(u+a)}{K}\right)\\ &= uZ(a) - 2\sum_1^\infty\frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\sin\frac{n\pi u}{K}\sin\frac{n\pi a}{K}.\end{aligned}\right\}(18)$$

Digitized by Google

Der vorige Ausdruck (18) lässt eine wichtige Umwandlung zu, mittelst welcher $\Pi(u, a)$ durch den Logarithmus eines unendlichen Products ausgedrückt werden kann.

Es ist nämlich

$$\frac{q^n}{1-q^{2n}} = q^n + q^{3n} + q^{5n} + \cdots\cdots,$$

also

$$\frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\cos nx = \frac{q^n}{n}\cos nx + \frac{q^{3n}}{n}\cos nx + \frac{q^{5n}}{n}\cos nx \cdots$$

$$(19) \quad \cdots \sum_1^\infty \frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\cos nx = \sum \frac{q^n}{n}\cos nx + \sum \frac{q^{3n}}{n}\cos nx + \sum \frac{q^{5n}}{n}\cos nx + \cdots$$

Hierin kann man nun jedes einzelne Glied summiren. Bezeichnet nämlich λ eine ungerade Zahl, so hat jedes Glied der vorigen Reihe die Form

$$\sum \frac{q^{\lambda n}}{n}\cos nx.$$

Setzt man aber

$$\cos nx = \tfrac{1}{2}(e^{nix} + e^{-nix}),$$

so ist

$$\sum \frac{q^{\lambda n}}{n}\cos nx = \tfrac{1}{2}\sum \frac{q^{\lambda n}}{n}e^{nix} + \tfrac{1}{2}\sum \frac{q^{\lambda n}}{n}e^{-nix},$$

oder, weil

$$z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 + \cdots = \sum \frac{1}{n}z^n = -\log(1-z)$$

ist,

$$\begin{aligned}\sum \frac{q^{\lambda n}}{n}\cos nx &= -\tfrac{1}{2}\log(1-q^\lambda e^{ix}) - \tfrac{1}{2}\log(1-q^\lambda e^{-ix}) \\ &= -\tfrac{1}{2}\log[(1-q^\lambda e^{ix})(1-q^\lambda e^{-ix})] \\ &= -\tfrac{1}{2}\log[1-q^\lambda(e^{ix}+e^{-ix})+q^{2\lambda}] \\ &= -\tfrac{1}{2}\log(1-2q^\lambda\cos x + q^{2\lambda}).\end{aligned}$$

Setzt man nun für λ nach und nach alle ungeraden Zahlen, so erhält man aus (19)

Digitized by Google

$$\sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{n(1-q^{2n})} \cos nx = -\tfrac{1}{2}\log(1-2q\cos x+q^2) - \tfrac{1}{2}\log(1-2q^3\cos x+q^6) - \tfrac{1}{2}\log(1-2q^5\cos x+q^{10}) - \cdots\cdots$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sum_1^\infty{}_h \log(1-2q^{2h-1}\cos x+q^{4h-2})$$

$$= -\tfrac{1}{2}\log\prod_1^\infty{}_h (1-2q^{2h-1}\cos x+q^{4h-2}).$$

Schreibt man also nun für x einmal $\frac{\pi(u-a)}{K}$ und dann $\frac{\pi(u+a)}{K}$, so ergiebt sich aus (18)

$$\Pi(u,a) = uZ(a) + \tfrac{1}{2}\log\prod_1^\infty{}_h \frac{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi(u-a)}{K}+q^{4h-2}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi(u+a)}{K}+q^{4h-2}}, \quad (20)$$

wobei bemerkt zu werden verdient, dass Zähler und Nenner dieses unendlichen Products dieselben Functionen von resp. $u-a$ und $u+a$ sind, wie die Function von u, welche den gemeinschaftlichen Nenner der in unendliche Producte entwickelten Functionen sin *am u*, cos *am u*, Δ *am u* bildet. (18) § 57.

Sechszehnter Abschnitt.

Die Jacobi'sche Function.

§ 65.

Wir sind nun an dem Punkte angekommen, wo wir diejenige Function einführen können, welche man nach *Jacobi* allgemein mit dem Buchstaben Θ bezeichnet, und die wir, weil die Einführung dieser Function, durch welche sich sämmtliche elliptische Functionen ausdrücken lassen, zu den wichtigsten Leistungen *Jacobi*'s im Gebiete der elliptischen Functionen gehört, nach *Dirichlet*'s Vorschlage die *Jacobi*'sche Function nennen wollen*).

*) In der Gedächtnissrede auf *Jacobi* (Crelle's Journ. Bd. 52) sagt *Dirichlet*: Bedenkt man, dass die neue Function jetzt das ganze Ge-

Digitized by Google

Wir betrachten, um zu derselben zu gelangen, das Product

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{h}(1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}),$$

welches sowohl den gemeinschaftlichen Nenner der Producte für $\sin am\, u$, $\cos am\, u$, $\Delta am\, u$ bildet, als auch mit den Argumenten $u - a$ und $u + a$ in dem Ausdrucke (20) für $\Pi(u, a)$ vorkommt. Wir bezeichnen dasselbe vorläufig mit $F(u)$, setzen daher

$$F(u) = \prod_{1}^{\infty}{}_{h}(1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2})$$

und wollen es in eine nach den Cosinus der Vielfachen von $\frac{\pi u}{K}$ fortgehende Reihe entwickeln. Zu dem Ende suchen wir zuerst eine Relation zwischen $F(u + 2iK')$ und $F(u)$ auf. Setzt man

$$\frac{\pi u}{2K} = x,$$

so ist

$$2\cos\frac{\pi u}{K} = (e^{2ix} + e^{-2ix}),$$

also

$$1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2} = (1 - q^{2h-1}e^{2ix})(1 - q^{2h-1}e^{-2ix}),$$

folglich hat man

$$(1)\quad \begin{cases} F(u) = (1 - qe^{2ix})(1 - q^3e^{2ix})(1 - q^5e^{2ix}) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \quad\quad = (1 - qe^{-2ix})(1 - q^3e^{-2ix})(1 - q^5e^{-2ix}) \cdot \cdot \cdot \cdot \end{cases}$$

---

biet der elliptischen Transcendenten beherrscht, dass *Jacobi* aus ihren Eigenschaften wichtige Theoreme der höheren Arithmetik abgeleitet hat, und dass sie eine wesentliche Rolle in vielen Anwendungen spielt, von welchen hier nur die vermittelst dieser Transcendente gegebene Darstellung der Rotationsbewegung erwähnt werden mag, welche eine von *Jacobi*'s letzten und schönsten Arbeiten ist, so wird man dieser Function die nächste Stelle nach den längst in die Wissenschaft aufgenommenen Elementartranscendenten einräumen müssen. Auffallender Weise hat eine so wichtige Function noch keinen andern Namen, als den der Transcendente Θ, nach der zufälligen Bezeichnung, mit der sie zuerst bei *Jacobi* erscheint; und die Mathematiker würden nur eine Pflicht der Dankbarkeit erfüllen, wenn sie sich vereinigten, ihr *Jacobi*'s Namen beizulegen, um das Andenken des Mannes zu ehren, zu dessen schönsten Entdeckungen es gehört, die innere Natur und hohe Bedeutung dieser Transcendente zuerst erkannt zu haben.

Digitized by Google

Setzt man nun $u + 2iK'$ statt u, so wird

$$x_1 = \frac{\pi(u + 2iK')}{2K} = x + \frac{\pi i K'}{K},$$

$$2ix_1 = 2ix - \frac{2\pi K'}{K},$$

folglich

$$e^{2ix_1} = q^2 e^{2ix}, \quad e^{-2ix_1} = \frac{1}{q^2} e^{-2ix}.$$

Demnach wird

$$F(u + 2iK') = (1 - q^3 e^{2ix})(1 - q^5 e^{2ix})(1 - q^7 e^{2ix}) \cdots$$
$$(1 - \frac{1}{q} e^{-2ix})(1 - q\, e^{-2ix})(1 - q^3\, e^{-2ix}) \cdots$$

Es ist aber

$$1 - \frac{1}{q} e^{-2ix} = -\frac{1}{q} e^{-2ix}(1 - q\, e^{2ix}),$$

folglich hat man auch:

$$F(u + 2iK') = -\frac{1}{q} e^{-2ix}(1 - q\, e^{2ix})(-q^3 e^{2ix})(1 - q^5 e^{2ix}) \cdots$$
$$(1 - q e^{-2ix})(1 - q^3 e^{-2ix})(1 - q^5 e^{-2ix}) \cdots$$

und daraus ergiebt sich durch Vergleichung mit (1)

$$F(u + 2iK') = -\frac{1}{q} e^{-2ix} F(u)$$

oder

$$F(u + 2iK') = -\frac{1}{q} e^{-\frac{\pi i u}{K}} F(u) \quad \cdots \quad (2)$$

Nun setzen wir*)

$$F(u) = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi u}{K} + A_2 \cos\frac{2\pi u}{K} + A_3 \cos\frac{3\pi u}{K} + \cdots,$$

und wollen vermittelst der eben gefundenen Relation (2) die unbestimmten Coefficienten A bestimmen. Setzt man wieder wie vorhin

$$\cos\frac{\pi u}{K} = \tfrac{1}{2}(e^{2ix} + e^{-2ix}),$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} F(u) = A_0 + \tfrac{1}{2} A_1 e^{2ix} + \tfrac{1}{2} A_2 e^{4ix} + \tfrac{1}{2} A_3 e^{6ix} + \cdots \\ + \tfrac{1}{2} A_1 e^{-2ix} + \tfrac{1}{2} A_2 e^{-4ix} + \tfrac{1}{2} A_3 e^{-6ix} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

*) *Jacobi*, Fundamenta, § 62 ff.

Digitized by Google

Daraus folgt

$$(4)\quad \begin{cases} -\frac{1}{q}\,e^{-2ix}F(u) = -\frac{A_0}{q}\,e^{-2ix} - \frac{A_1}{2q} - \frac{A_2}{2q}\,e^{2ix} \\ \qquad\qquad - \frac{A_3}{2q}\,e^{4ix} - \cdots\cdots \\ \qquad\qquad - \frac{A_1}{2q}\,e^{-4ix} - \frac{A_2}{2q}\,e^{6ix} - \frac{A_3}{2q}\,e^{-8ix} - \cdots\cdots \end{cases}$$

Setzen wir ferner in (3) $u + 2iK'$ statt u, so geht, wie wir gesehen haben, e^{2ix} in $q^2 e^{2ix}$ und e^{-2ix} in $\frac{1}{q^2}\,e^{-2ix}$ über, folglich ist

$$F(u+2iK') = A_0 + \frac{A_1 q^2}{2}\,e^{2ix} + \frac{A_2 q^4}{2}\,e^{4ix} + \frac{A_3 q^6}{2}\,e^{6ix} + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{A_1}{2q^2}\,e^{-2ix} + \frac{A_2}{2q^4}\,e^{-4ix} + \frac{A_3}{2q^6}\,e^{-6ix} + \cdots\cdots$$

Da nun diese Reihe der Reihe (4) gleich sein muss, so erhält man:

$$\begin{aligned} -\frac{A_1}{2q} &= A_0 & A_1 &= -2q\,A_0 \\ -\frac{A_2}{2q} &= \frac{A_1 q^2}{2} & A_2 &= +2q^4\,A_0 \\ -\frac{A_3}{2q} &= \frac{A_2 q^4}{2} & A_3 &= -2q^9\,A_0 \\ -\frac{A_4}{2q} &= \frac{A_3 q^6}{2} & A_4 &= +2q^{16}\,A_0 \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \end{aligned}$$

und demnach

$$(5)\quad \prod_1^\infty{}^h (1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}) = A_0\,(1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K}$$
$$+ 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + 2q^{16}\cos\frac{4\pi u}{K} - \cdots).$$

Die in A_0 multiplicirte Reihe ist es nun, welche *Jacobi* als eine neue Function eingeführt und mit $\Theta(u)$ bezeichnet hat, sodass die *Jacobi*'sche Function durch die folgende Gleichung definirt ist:

$$(6)\quad \Theta(u) = 1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K}$$
$$+ 2q^{16}\cos\frac{4\pi u}{K} - \cdots$$

Darin sind die Exponenten von q die Quadrate der natürlichen Zahlen, und daher gehört diese Reihe zu den am

Digitized by Google

stärksten convergirenden Reihen, die es in der Mathematik überhaupt giebt.

Die Jacobi'sche Function ist periodisch, denn sie bleibt unverändert, wenn man $u + 2K$ statt u setzt, oder es ist

$$\Theta(u + 2K) = \Theta(u).$$

Sie ist aber nur einfach periodisch; wenn man das Argument u um $2iK'$ vermehrt, so bleibt Θ nicht unverändert, vielmehr erhält man aus (2), da

$$F(u) = A_0 \Theta(u)$$

ist,

$$\Theta(u + 2iK') = -\frac{1}{q} e^{-\frac{\pi i u}{K}} \Theta(u) \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (7)$$

Für specielle Werthe erhält man aus (6)

$$\left.\begin{aligned} \Theta(0) &= 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \cdots \\ \Theta(K) &= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots \\ \Theta\left(\frac{K}{2}\right) &= 1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + 2q^{64} - \cdots \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Wir schreiten nun zunächst zur Bestimmung des von u unabhängigen Coefficienten A_0. Da derselbe jedenfalls von q abhängen wird, so setzen wir $A_0 = \varphi(q)$ und haben dann

$$\prod_1^\infty (1 - 2q^{2h-1} \cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}) = \varphi(q)\, \Theta(u) \quad . \quad (9)$$

Setzt man darin $u = 0$ und $u = \frac{K}{2}$, so erhält man

$$\prod_1^\infty (1 - q^{2h-1})^2 = \varphi(q)\, \Theta(0),$$

$$\prod_1^\infty (1 + q^{4h-2}) = \varphi(q)\, \Theta\left(\frac{K}{2}\right).$$

Nun zeigen aber die Gleichungen (8), dass $\Theta(0)$ in $\Theta\left(\frac{K}{2}\right)$ übergeht, wenn man darin q^4 statt q setzt. Daher hat man auch die Gleichung:

$$\prod_1^\infty (1 - q^{8h-4})^2 = \varphi(q^4)\, \Theta\left(\frac{K}{2}\right),$$

Digitized by Google

und folglich

$$\frac{\varphi(q)}{\varphi(q^4)} = \prod_1^\infty{}_h \frac{1+q^{4h-2}}{(1-q^{8h-4})^2}$$

$$= \prod_1^\infty{}_h \frac{1}{(1-q^{8h-4})(1-q^{4h-2})}.$$

Nun repräsentiren $4h-2$ und $8h-4$ resp. die Zahlen:

$4h-2$ .... 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, ...

$8h-4$ .... 4, 12, 20, 28, 36, ...

Fügt man diesen noch die Zahlen von der Form $8h$ hinzu,

$8h$ ..... 8, 16, 24, 32, ...

so erhellt, dass die drei Formen $4h-2$, $8h-4$, $8h$ zusammengenommen alle geraden Zahlen enthalten. Multiplicirt man also den vorstehenden Bruch im Zähler und Nenner mit $1-q^{8h}$, so wird man im Nenner lauter Factoren von der Form $1-q^{2h}$ haben und erhält somit

$$\frac{\varphi(q)}{\varphi(q^4)} = \prod_1^\infty{}_h \frac{1-q^{8h}}{1-q^{2h}}.$$

Setzt man nun in dieser Gleichung aufs neue q^4 statt q, und fährt damit fort, so erhält man successive

$$\frac{\varphi(q^4)}{\varphi(q^{16})} = \prod_1^\infty{}_h \frac{1-q^{32h}}{1-q^{8h}}$$

$$\frac{\varphi(q^{16})}{\varphi(q^{64})} = \prod_1^\infty{}_h \frac{1-q^{128h}}{1-q^{32h}}$$

$$\frac{\varphi(q^{64})}{\varphi(q^{256})} = \prod_1^\infty{}_h \frac{1-q^{512h}}{1-q^{128h}}$$

. . . . . .

Nun convergirt q^n mit wachsendem n zur Grenze Null, folglich $1-q^n$ zur Grenze 1. Ausserdem ist auch, wie aus (5) hervorgeht, $\varphi(0) = 1$. Setzt man daher obige Gleichungen bis ins Unendliche fort und multiplicirt sie sämmtlich, so erhält man

$$\varphi(q) = \prod_1^\infty{}_h \frac{1}{1-q^{2h}};$$

Digitized by Google

Demnach ist nun vollständig

$$\prod_1^\infty{}_h(1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}) = \frac{\Theta(u)}{\prod_1^\infty{}_h(1-q^{2h})}. \quad (10)$$

Setzt man darin $u = 0$ und $u = K$, so erhält man die Werthe von $\Theta(0)$, $\Theta(K)$ auch durch unendliche Producte ausgedrückt. Nämlich zuerst ist

$$\Theta(0) = \prod(1-q^{2h-1})^2(1-q^{2h}) = \prod(1-q^{2h-1})(1-q^h),$$

oder weil

$$1 - q^h = \frac{1-q^{2h}}{1+q^h}$$

ist,

$$\Theta(0) = \prod\frac{(1-q^{2h-1})(1-q^{2h})}{1+q^h},$$

das heisst

$$\Theta(0) = \prod_1^\infty{}_h\frac{1-q^h}{1+q^h}.$$

Man erhält ferner:

$$\Theta(K) = \prod(1+q^{2h-1})^2(1-q^{2h})$$
$$= \prod(1+q^{2h-1})(1+q^{2h-1})(1-q^{2h});$$

setzt man darin

$$1 + q^{2h-1} = \frac{1-q^{4h-2}}{1-q^{2h-1}},$$

so kommt

$$\Theta(K) = \prod\frac{(1-q^{4h-2})(1+q^{2h-1})(1-q^{\quad})}{1-q^{2h-1}}.$$

Nun ist aber

$$\prod(1+z^h) = \prod\frac{1-z^{2h}}{1-z^h} = \prod\frac{1-z^{2h}}{(1-z^{2h})(1-z^{2h-1})}$$
$$= \prod\frac{1}{1-z^{2h-1}},$$

also auch

$$\prod(1-z^{2h-1}) = \prod\frac{1}{1+z^h},$$

und wenn man $z = q^2$ annimmt,

$$\prod(1-q^{4h-2}) = \prod\frac{1}{1+q^{2h}};$$

Digitized by Google

daher erhält man

$$(11) \quad \ldots \quad \Theta(K) = \prod_{1}^{\infty}{}_{h} \frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}} \cdot \frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h}}.$$

Diese für $\Theta(0)$ und $\Theta(K)$ sich ergebenden unendlichen Producte haben wir aber § 57 (15) geschlossenen Ausdrücken gleich gefunden, nämlich

$$\prod \frac{1-q^h}{1+q^h} = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}, \quad \prod \frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}} \cdot \frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h}} = \sqrt{\frac{2K}{\pi}};$$

folglich ist nun, wenn man zugleich die Formeln (8) berücksichtigt,

$$(12) \quad \begin{cases} \Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \cdots \\ \Theta(K) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots \end{cases}$$

§ 66.

Ehe wir zur Darstellung der elliptischen Functionen durch die Jacobi'sche Function übergehen, wollen wir an einem Beispiele auf den Zusammenhang dieser Function mit der Zahlentheorie aufmerksam machen. Dieser Zusammenhang entsteht dadurch, dass man vermittelst der Jacobischen Function zwei ganz von einander verschiedene Reihenentwickelungen einer und derselben Grösse erhalten kann, und zwar Reihen, die auch nach den Potenzen einer und derselben Grösse fortschreiten. Dadurch ergeben sich Beziehungen zwischen denjenigen ganzen Zahlen, welche die Exponenten der einen Reihe, und denjenigen ganzen Zahlen, die die Exponenten der anderen Reihe bilden. Diese Betrachtungsweise ist derjenigen analog, welche *Euler* in dem Abschnitte: „*De partitione numerorum*“ der „*Introductio in analysin infinitorum*“ anwendete, um durch Vergleichung der Exponenten einer Reihe mit den Coefficienten derselben Sätze der höheren Arithmetik abzuleiten, eine Betrachtungsweise, die auch bei den aus der Theorie der elliptischen Functionen hervorgehenden Reihen anwendbar ist.

Die Reihen, welche wir hier im Auge haben, sind hauptsächlich die im § 40 der Fundamenta gegebenen, von denen

Digitized by Google

zwei, nämlich die für $\frac{2K}{\pi}$ und für $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2$ im § 58 abgeleitet worden sind. Wir wollen nun die letzte derselben benutzen, um durch Vergleichung mit der Reihe (12) für $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ den Satz zu beweisen, dass jede ganze Zahl die Summe von vier Quadraten ist. Da nämlich die Reihe (12)

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots$$

die Quadrate der natürlichen Zahlen zu Exponenten hat, so wird die vierte Potenz dieser Reihe aus lauter Gliedern bestehen, bei denen jeder Exponent die Summe von vier Quadratzahlen ist. Wenn man nun zeigen kann, dass die § 58 (30) abgeleitete Reihe

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + 8\left[\frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \frac{4q^4}{1+q^4} + \cdots\right] \quad (13)$$

alle ganzen Zahlen als Exponenten enthält, so folgt der zu beweisende Satz von selbst. Man muss also die in der vorstehenden Reihe enthaltenen Brüche in ihre Reihen auflösen und in der dann entstehenden Reihe das Gesetz der Fortschreitung ermitteln. Dies hat *Jacobi* in § 40 der Fundamenta mit allen dort vorkommenden Reihen gethan; die Ausführung der Entwickelung bei vorstehender Reihe mag wieder zur Erläuterung der dort vorkommenden Betrachtungen dienen.

Entwickelt man in (13) alle Brüche in Reihen, so erhält man

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + 8\left\{\begin{array}{l} q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + q^8 + q^9 + \cdots \\ \quad + 2q^2 \quad - 2q^4 \quad + 2q^6 \quad - 2q^8 \quad + \cdots \\ \quad\quad + 3q^3 \quad\quad + 3q^6 \quad\quad + 3q^9 + \cdots \\ \quad\quad\quad + 4q^4 \quad\quad\quad - 4q^8 \quad + \cdots \\ \quad\quad\quad\quad + 5q^5 \quad\quad\quad\quad + \cdots \\ \quad\quad\quad\quad\quad + 6q^6 \quad\quad\quad\quad - \cdots \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad + 7q^7 \quad\quad\quad + \cdots \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + 8q^8 \quad\quad - \cdots \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + 9q^9 + \cdots \end{array}\right\}$$

$$= 1 + 8\left\{\begin{array}{l} q + 3q^2 + 4q^3 + 3q^4 + 6q^5 + 12q^6 + 8q^7 \\ \quad + 3q^8 + 13q^9 + \cdots \end{array}\right\} \quad (14)$$

Digitized by Google

Es entsteht also eine Reihe, welche höchstwahrscheinlich sämmtliche Potenzen von q enthält. Da es aber der Fall sein könnte, dass vielleicht bei irgend einer späteren Potenz sich die Coefficienten aufheben, sodass eine oder die andere Potenz doch in der Reihe fehlen könnte, so müssen wir das Gesetz der Reihe aufsuchen, weil zum Beweise unseres Satzes alles darauf ankommt, nachzuweisen, dass in der Reihe (14) alle ganzen Zahlen als Exponenten vorkommen.

Bezeichnet A_n den Coefficienten der Potenz q^n, so ist

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + 8 \sum_1^\infty A_n q^n.$$

Ist nun zuerst n eine ungerade Zahl, so tragen nur die Glieder von der Form $\frac{pq^p}{1-q^p}$, in denen p ebenfalls eine ungerade Zahl ist, zur Bildung des Coefficienten A_n bei. Es ist aber

$$\frac{pq^p}{1-q^p} = pq^p + pq^{2p} + pq^{3p} + pq^{4p} + \cdots$$

Soll daher eine der in dieser Reihe vorkommenden Potenzen gleich q^n sein, so muss n ein Vielfaches von p, oder p ein Divisor der Zahl n sein. Es werden daher nur diejenigen Glieder von der Form $\frac{pq^p}{1-q^p}$ zur Bildung von $A_n q^n$ beitragen, bei welchen die Zahl p ein Divisor der Zahl n ist, und zwar wird jede solche Zahl p ein und nur ein Glied von der Form $pq^{\lambda p}$ liefern, nämlich dasjenige, für welches $\lambda p = n$ ist. Der Coefficient A_n ist daher die Summe aller derjenigen Zahlen p, welche Divisoren von n sind (1 und n selbst mitgerechnet). Bezeichnet man also mit $\psi(n)$ die Summe der Divisoren von n, so ist

$$A_n = \psi(n).$$

Ist zweitens n eine gerade Zahl, und zwar von der Form $2^\lambda p$, wo p wiederum eine ungerade Zahl bezeichne, so können sowohl Glieder von der Form $\frac{mq^m}{1-q^m}$, als auch Glieder von der Form $\frac{2mq^{2m}}{1+q^{2m}}$ (wo m ungerade) zur Bildung von $q^{2^\lambda p}$ beitragen. Nun ist aber

Digitized by Google

$$\frac{m q^m}{1-q^m} = \sum_1^\infty{}_h\, m q^{hm},$$

$$\frac{2m q^{2m}}{1+q^{2m}} = -\sum_1^\infty{}_h\, (-1)^h\, 2m q^{2hm}.$$

Es muss daher in dem einen Falle m so beschaffen sein, dass $hm = 2^\lambda p$, und in dem anderen Falle so, dass $2hm = 2^\lambda p$ werden kann, was in beiden Fällen nicht anders möglich ist, als wenn m ein Divisor von p ist, weil m und 2^λ relative Primzahlen sind. Für jeden Divisor m der Zahl p aber wird es eine Reihe von Gliedern geben, welche entwickelt die Potenz $q^{2^\lambda p}$ enthalten, nämlich nicht bloss die beiden oben angeschriebenen Glieder, sondern auch die Glieder von der Form

$$\frac{2^\mu m q^{2^\mu m}}{1+q^{2^\mu m}},$$

in welchen μ den Exponenten λ nicht übersteigt. Denn setzt man zur Abkürzung $\frac{p}{m} = \alpha$, so dass $n = 2^\lambda \alpha m$ ist, so ist, weil man auch schreiben kann:

$$n = 2^\lambda \alpha m = 2^{\lambda-1} \alpha 2m = 2^{\lambda-2} \alpha 4m \cdots = 2\alpha 2^{\lambda-1} m = \alpha 2^\lambda m,$$

$$\frac{m q^m}{1-q^m} = m q^m + m q^{2m} + m q^{3m} \cdots\cdots + m q^{2^\lambda \alpha m} + \cdots,$$

$$\frac{2m q^{2m}}{1+q^{2m}} = 2m q^{2m} - 2m q^{4m} + 2m q^{6m} \cdots\cdots - 2m q^{2^{\lambda-1}\alpha 2m} + \cdots,$$

$$\frac{4m q^{4m}}{1+q^{4m}} = 4m q^{4m} - 4m q^{8m} + 4m q^{12m} \cdots\cdots - 4m q^{2^{\lambda-2}\alpha 4m} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{2^{\lambda-1} m q^{2^{\lambda-1} m}}{1+q^{2^{\lambda-1} m}} = 2^{\lambda-1} m q^{2^{\lambda-1} m} - 2^{\lambda-1} m q^{2.2^{\lambda-1} m} \cdots - 2^{\lambda-1} m q^{2^\alpha 2^{\lambda-1} m} + \cdots$$

$$\frac{2^\lambda m q^{2^\lambda m}}{1+q^{2^\lambda m}} = 2^\lambda m q^{2m} - 2^\lambda m q^{2.2^\lambda m} \cdots + 2^\lambda m q^{\alpha 2^\lambda m} - \cdots.$$

In der ersten Reihe haben alle Glieder das + Zeichen, in den folgenden erhält die Potenz q^n, d. h. $q^{2^\lambda \alpha m}$, das Minuszeichen, weil die Zahlen $2^{\lambda-1}\alpha$, $2^{\lambda-2}\alpha$, $\ldots . 2\alpha$ alle gerade Zahlen, also n ein gerades Vielfaches von resp. $2m$, $4m$,

Digitized by Google

$8m, \ldots 2^{\lambda-1}m$ ist. In der letzten Reihe dagegen hat das betreffende Glied das $+$ Zeichen, weil α eine ungerade Zahl ist, also n ein ungerades Vielfaches von $2^{\lambda}m$. Der Antheil, den ein Factor m von p zur Bildung des Coefficienten A_n liefert, ist hienach

$$m - 2m - 4m - 8m \cdots - 2^{\lambda-1}m + 2^{\lambda}m$$
$$= m\,(1 - 2 - 4 - 8 \cdots - 2^{\lambda-1} + 2^{\lambda}).$$

Nun ist aber

$$1 + 2 + 4 + 8 \cdots + 2^{\lambda-1} = 2^{\lambda} - 1,$$

also

$$1 - 2 - 4 - 8 \cdots - 2^{\lambda-1} + 2^{\lambda} = 1 - 2^{\lambda} + 2 + 2^{\lambda} = 3.$$

Demnach ist der Antheil, den der Divisor m von p zur Bildung von A_n beiträgt, gleich $3m$. Nun tragen alle Divisoren m dazu bei, und nur diese; folglich ist, wenn $\psi(p)$ die Summe der Divisoren von p bedeutet,

$$A_n = 3\psi(p), \text{ wenn } n = 2^{\lambda}p.$$

Dadurch ist der Coefficient A_n für alle Fälle vollständig bestimmt, und da man alle geraden Zahlen erhält, wenn man die Formen $2(2n-1)$, $4(2n-1)$, $8(2n-1)$, $16(2n-1)$ u. s. w. für alle ganzzahligen Werthe von n von 1 bis ∞ bildet, so kann man die Reihe (14) so schreiben:

$$(15)\quad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + 8\psi(2n-1)\sum_{1}^{\infty}{}_n\,(q^{2n-1} + 3q^{3(2n-1)} + 3q^{4(2n-1)} + 3q^{8(2n-1)} + \cdots).$$

Hieraus erhellt nun, dass wirklich bei keiner Potenz der vorliegenden Reihe der Coefficient verschwindet, sondern dass diese Reihe alle ganzen Potenzen von q enthält. Nun folgt andrerseits aus (12)

$$(16)\quad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = [1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots]^4.$$

Demnach ist die vierte Potenz eine Reihe, deren Exponenten die Quadrate aller Zahlen sind, gleich einer Reihe, die alle Zahlen als Exponenten enthält. Erhebt man aber die erstere Reihe auf die vierte Potenz, so entsteht eine Reihe, in welcher jedes Glied das Product aus vier Gliedern der Reihe (16) ist, also die Form

$$q^{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}$$

Digitized by Google

hat, wobei α, β, γ, δ irgend vier gleiche oder verschiedene ganze Zahlen oder auch Null bedeuten. Jedes Glied der Reihe (15) muss also einem Gliede von voriger Form gleich sein; bedeutet also h irgend eine ganze Zahl, so ist

$$h = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

Siebzehnter Abschnitt.

Darstellung der elliptischen Functionen durch die Jacobi'sche Function.

§ 67.

Es wurde schon im § 65 bemerkt, dass die Jacobi'sche Function die Grundlage der elliptischen Functionen bildet, in der Art, dass dieselben sich sämmtlich durch jene ausdrücken lassen. Dieses soll nun im Folgenden näher ausgeführt werden.

Wir hatten § 64 (20) gefunden:

$$\Pi(u, a) = u\,Z(a) + \tfrac{1}{2}\log \prod \frac{1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi(u-a)}{K} + q^{4h-2}}{1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi(u+a)}{K} + q^{4h-2}}$$

$$\prod\left(1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}\right) = \frac{\Theta(u)}{\Pi(1-q^{2h})}.$$

Hieraus fliesst zunächst ein Ausdruck der Transcendente Π durch Θ nämlich,

$$\Pi(u, a) = u\,Z(a) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

Aus dieser Form geht sogleich der schon § 21 bewiesene Satz über die Vertauschung des Arguments mit dem Parameter bei der elliptischen Transcendente der dritten Gattung wieder hervor. Denn vertauscht man in der vorigen Formel u mit a, so erhält man, weil, wie sich aus der Reihe (6) § 65 für $\Theta(u)$ unmittelbar ergiebt,

$$\Theta(-u) = \Theta(u)$$

ist:

$$\Theta(u-a) = \Theta(a-u),$$

und folglich

$$\Pi(u, a) - u\,Z(a) = \Pi(a, u) - a\,Z(u) \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

Digitized by Google

Setzt man darin noch $u = K$, so erhält man, weil

$$\Pi(a, K) = 0, \quad Z(K) = 0$$

ist,

$$\Pi(K, a) = KZ(a).$$

Wir hatten ferner (17) § 64 gefunden:

$$\frac{d^2\Pi(u, a)}{du^2} = \tfrac{1}{2} k^2 [\sin^2 am(u + a) - \sin^2 am(u - a)].$$

Führt man darin die Function Δ statt des Sinus ein, indem

$$k^2 \sin^2 am z = 1 - \Delta^2 am z$$

ist, so kommt

$$\frac{d^2\Pi(u, a)}{du^2} = \tfrac{1}{2} [\Delta^2 am(u - a) - \Delta^2 am(u + a)],$$

und wenn man von 0 bis u integrirt,

$$\frac{d\Pi(u, a)}{du} = \tfrac{1}{2} \int_0^u \Delta^2 am(u - a)\, du - \tfrac{1}{2} \int_0^u \Delta^2 am(u + a)\, du.$$

Nun ist aber

$$\int_0^z \Delta^2 am z\, dz = E(z) \text{ und } E(-z) = -E(z),$$

folglich

$$\int_0^u \Delta^2 am(u - a)\, du = E(u - a) + E(a),$$

$$\int_0^u \Delta^2 am(u + a)\, du = E(u + a) - E(a).$$

Demnach erhält man

$$\frac{d\Pi(u, a)}{du} = E(a) + \tfrac{1}{2} E(u - a) - \tfrac{1}{2} E(u + a),$$

oder, wenn man die Relation (14) § 63

$$E(u) = \frac{E}{K} u + Z(u)$$

benutzt,

$$(3) \quad \frac{d\Pi(u, a)}{du} = Z(a) + \tfrac{1}{2} Z(u - a) - \tfrac{1}{2} Z(u + a).$$

Integrirt man diese Gleichung nun nochmals zwischen 0 und u, so ergiebt sich

$$\Pi(u, a) = u\, Z(a) + \tfrac{1}{2} \int_0^u Z(u - a)\, du - \tfrac{1}{2} \int_0^u Z(u + a)\, du.$$

Digitized by Google

Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit der Formel (1) liefert nun auch eine Beziehung zwischen den Transcendenten Z und Θ; nämlich zunächst erhält man

$$\log \frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)} = \int_0^u Z(u+a)\,du - \int_0^u Z(u-a)\,du.$$

Setzt man aber darin $a = u$ und bemerkt, dass

$$\left.\begin{aligned} \int_0^u Z(u+a)\,du &= \int_0^{u+a} Z(z)\,dz - \int_0^a Z(z)\,dz \\ \int_0^u Z(u-a)\,du &= \int_0^{u-a} Z(z)\,dz - \int_0^a Z(z)\,dz^*), \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

so folgt

$$\log \frac{\Theta(2u)}{\Theta(0)} = \int_0^{2u} Z(z)\,dz,$$

oder, wenn man wieder u statt $2u$ schreibt,

$$\log \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \int_0^u Z(u)\,du. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Hieraus fliesst zunächst die Formel, vermittelst welcher *Jacobi* im § 52 der Fundamenta die Function Θ eingeführt hat, nämlich

$$\Theta(u) = \Theta(0)\, e^{\int_0^u Z(u)\,du};$$

ferner aber erhält man durch Differentiation auch Z durch Θ ausgedrückt, nämlich

$$Z(u) = \frac{d \cdot \log \Theta(u)}{du},$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{d\,\Theta(u)}{du} = \Theta'(u)$$

setzt,

$$Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

---

*) Weil nämlich $Z(z)$ eine ungerade Function, also

$$Z(-z) = -Z(z)$$

ist.

Digitized by Google

Kehren wir nun noch einmal zur Formel (3) zurück und schreiben in dem linken Theile derselben den aus der ursprünglichen Definition der Transcendenten Π (§ 21) folgenden Werth, so lautet dieselbe so:

$$\frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a\, \Delta am\, a \sin^2 am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u} = Z(a) + \tfrac{1}{2} Z(u - a) - \tfrac{1}{2} Z(u + a).$$

Vertauscht man darin a mit u, so entsteht, weil $Z(-z) = -Z(z)$,

$$\frac{k^2 \sin am\, u \cos am\, u\, \Delta am\, u \sin^2 am\, a}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u} = Z(u) - \tfrac{1}{2} Z(u - a) - \tfrac{1}{2} Z(u + a).$$

Durch Addition beider erhält man also

$$(6) \quad Z(u) + Z(a) - Z(u + a) = k^2 \sin am\, u \sin am\, a \frac{\sin am\, u \cos am\, a\, \Delta am\, a + \sin am\, a \cos am\, u\, \Delta am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u}$$

$$= k^2 \sin am\, u \sin am\, a \sin am\,(u + a),$$

wodurch das Additionstheorem für die zweite Gattung aufs neue abgeleitet worden ist. Setzt man darin $a = K$, so folgt, weil $Z(K) = 0$ ist, (§ 63)

$$(7) \quad Z(u) - Z(u + K) = k^2 \sin am\, u \sin am\,(u + K).$$

Schreibt man diese Gleichung, indem man $-u$ statt u einführt, in folgender Form:

$$Z(u) + Z(K - u) = k^2 \sin am\, u \sin am\,(K - u),$$

so ergiebt sie auch den Werth von Z für das Argument $\frac{K}{2}$, nämlich, da $\sin am \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{1}{1 + k'}}$ ist, (§ 10)

$$2 Z\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{k^2}{1 + k'} = 1 - k',$$

also

$$Z\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{1 - k'}{2}.$$

Wir benutzen aber die Gleichung (7) noch in anderer Weise. Sie lässt sich nämlich auch schreiben

$$Z(u) - Z(u + K) = \frac{k^2 \sin am\, u \cos am\, u}{\Delta am\, u} = -\frac{d \log \Delta am\, u}{du}.$$

Integrirt man nun zwischen 0 und u, und benutzt die Gleichung (5)

Digitized by Google

$$\int_0^u Z(u)\,du = \log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)},$$

aus welcher mit Berücksichtigung der ersten der Gleichungen (4) auch leicht die folgende

$$\int_0^u Z(u+K)\,du = \log\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(K)}$$

sich ergiebt, so folgt

$$\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} - \log\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(K)} = -\log \Delta\, am\, u,$$

oder

$$\Delta\, am\, u = \frac{\Theta(0)}{\Theta(K)}\cdot\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)},$$

wodurch dann die Function $\Delta\, am\, u$ durch die Jacobi'sche Function ausgedrückt ist. Den Werth des allein vom Modul abhängigen Coefficienten $\frac{\Theta(0)}{\Theta(K)}$ erhält man leicht, wenn man $u = K$ setzt und sich erinnert, dass $\Theta(2K) = \Theta(0)$, $\Delta\, am\, K = k'$ ist, nämlich

$$\frac{\Theta(0)}{\Theta(K)} = \sqrt{k'},$$

was sich auch aus den Formeln (12) § 65 ergeben hätte Man hat also

$$\Delta\, am\, u = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}. \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Dasselbe Resultat hätte man auch aus dem unendlichen Product ableiten können. Denn es war (10) § 65

$$\Theta(u) = \prod\prod(1-q^{2h})(1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2})\cdot\cdot \quad (9)$$

Setzt man darin $u+K$ für u, so erhält man

$$\Theta(u+K) = \prod\prod(1-q^{2h})(1+2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}),$$

also

$$\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)} = \prod_1^{\infty h}\frac{1+2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}},$$

und vergleicht man dies mit dem unendlichen Product für $\Delta\, am\, u$, (18) § 57, so ergiebt sich sofort, wie oben,

$$\Delta\, am\, u = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}.$$

Digitized by Google

§ 68.

Wir wollen nun auch in ähnlicher Weise $\Theta(u + iK')$ bilden und sowohl das unendliche Product, als auch die unendliche Reihe dafür ermitteln. Zuerst ist, wenn man

$$\frac{\pi u}{2K} = x$$

setzt,

$$1 - 2q^{2h-1}\cos 2x + q^{4h-2} = 1 - q^{2h-1}(e^{2ix} + e^{-2ix}) + q^{4h-2}$$
$$= (1 - q^{2h-1}e^{2ix})(1 - q^{2h-1}e^{-2ix}).$$

Setzt man nun darin $u + iK'$ statt u und bezeichnet $\frac{\pi(u+iK')}{2K}$ mit x_1, so ist

$$(10) \cdot x_1 = x + \frac{\pi i K'}{2K}; \quad 2ix_1 = 2ix - \frac{\pi K'}{K}, \quad e^{2ix_1} = qe^{2ix}.$$

Demnach wird

$$1 - 2q^{2h-1}\cos 2x_1 + q^{4h-2} = (1 - q^{2h}e^{2ix})(1 - q^{2h-2}e^{-2ix}),$$

also

$$\prod_1^{h=\infty}(1 - 2q^{2h-1}\cos 2x_1 + q^{4h-2})$$
$$= \begin{cases} (1 - q^2e^{2ix})(1 - q^4e^{2ix})(1 - q^6e^{2ix})\cdots \\ (1 - e^{-2ix})(1 - q^2e^{-2ix})(1 - q^4e^{-2ix})(1 - q^6e^{-2ix})\cdots \end{cases}$$
$$= (1 - e^{-2ix})\prod_1^{h=\infty}(1 - q^{2h}e^{2ix})(1 - q^{2h}e^{-2ix})$$
$$= (1 - e^{-2ix})\prod_1^{h=\infty}(1 - 2q^{2h}\cos 2x + q^{4h}).$$

Ferner ist aber

$$(1 - e^{-2ix}) = e^{-ix}(e^{ix} - e^{-ix}) = 2ie^{-ix}\sin x,$$

also

$$\prod_1^{h=\infty}(1 - 2q^{2h-1}\cos 2x_1 + q^{4h-2})$$
$$= 2ie^{-ix}\sin x\prod_1^{h=\infty}(1 - 2q^{2h}\cos 2x + q^{4h}).$$

Demnach folgt nun aus (9)

$$(11)\quad \frac{\Theta(u+iK')}{\prod_1^{h=\infty}(1-q^{2h})} = 2ie^{-\frac{\pi iu}{2K}}\sin\frac{\pi u}{2K}\prod_1^{h=\infty}(1 - 2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h})$$

Digitized by Google

und folglich

$$\frac{\Theta(u+iK')}{\Theta(u)} = 2ie^{-\frac{\pi i u}{2K}} \sin\frac{\pi u}{2K} \prod_1^\infty \frac{1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}.$$

Dieses ist aber das unendliche Product, welches [nach (18) § 57] sin *am u* darstellt. Demnach erhält man

$$\frac{\Theta(u+iK')}{\Theta(u)} = i\frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt[4]{q}} e^{-\frac{\pi i u}{2K}} \sin am\, u,$$

oder

$$\sin am\, u = \frac{\sqrt[4]{q}}{i\sqrt[4]{k}} e^{\frac{\pi i u}{2K}} \frac{\Theta(u+iK')}{\Theta(u)}. \quad \ldots \quad (12)$$

Also ist auch sin *am u*, freilich vorerst noch in imaginärer Form, durch die Jacobi'sche Function dargestellt.

Um nun auch eine reelle Form dafür zu erhalten, entwickeln wir auch die Reihe für $\Theta(u+iK')$. Es ist [(6) § 65]

$$\Theta(u) = 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \cos 2nx,$$

und daher

$$\Theta(u+iK') = 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \cos 2nx_1.$$

Nun ist aber

$$2\cos 2nx_1 = e^{2nix_1} + e^{-2nix_1}$$
$$= q^n e^{2nix} + \frac{1}{q^n} e^{-2nix} \text{ [wegen (10)]}.$$

Demnach erhält man:

$$\Theta(u+iK') = 1 - q\left(qe^{2ix} + \frac{1}{q}e^{-2ix}\right) + q^4\left(q^2e^{4ix} + \frac{1}{q^2}e^{-4ix}\right)$$
$$- q^9\left(q^3e^{6ix} + \frac{1}{q^3}e^{-6ix}\right) + \ldots$$
$$= 1 - q^2e^{2ix} + q^6e^{4ix} - q^{12}e^{6ix} + \ldots\ldots$$
$$- e^{-2ix} + q^2e^{\quad x} - q^6e^{-6ix} + \ldots$$

Multiplicirt und dividirt man aber diese Reihe mit e^{ix}, so erhält man

$$\Theta(u+iK') = e^{-ix}\{e^{ix} - q^2e^{3ix} + q^6e^{5ix} - q^{12}e^{7ix} + \ldots\ldots$$
$$- e^{-ix} + q^2e^{-3ix} - q^6e^{-5ix} + q^{12}e^{-7ix} - \ldots\ldots\}$$
$$= 2ie^{-ix}\{\sin x - q^2\sin 3x + q^6\sin 5x - q^{12}\sin 7x + \cdots\}$$
$$= 2ie^{-ix}\{\sin x - \sqrt[4]{q^8}\sin 3ix + \sqrt[4]{q^{24}}\sin 5x$$
$$- \sqrt[4]{q^{48}}\sin 7x + \ldots\ldots\},$$

Digitized by Google

also, wenn man nun noch mit $\sqrt[4]{q}$ multiplicirt und dividirt,

$$\Theta(u+iK')$$
$$=\frac{2ie^{-\frac{\pi}{4}ix}}{\sqrt[4]{q}}\{\sqrt[4]{q}\sin x-\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x+\cdots\},$$

oder

$$\Theta(u+iK')$$
$$=\frac{2ie^{-\frac{\pi iu}{2K}}}{\sqrt[4]{q}}\{\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K}-\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\sqrt[4]{q^{25}}\sin\frac{5\pi u}{2K}-\cdots\}.$$

Hieraus geht hervor, dass

$$\frac{\Theta(u+iK')}{i}e^{\frac{\pi iu}{2K}}$$

eine reelle Grösse ist. Die vorstehende Reihe hat *Jacobi* als eine neue Function eingeführt, die er mit $H(u)$ bezeichnet, indem er setzt*)

$$(13)\cdot\quad H(u)=2\left\{\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K}-\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\sqrt[4]{q^{25}}\sin\frac{5\pi u}{2K}-\cdots\right\}.$$

Diese Reihe convergirt ebenfalls sehr stark, da die Exponenten von q unter dem Wurzelzeichen die Quadrate der ungeraden Zahlen sind. Nach dem Vorigen hängen die Functionen H und Θ durch die Gleichung

$$(14)\quad\cdots\quad H(u)=\frac{\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi iu}{2K}}}{i}\Theta(u+iK')$$

zusammen. Führt man dies nun in die Gleichung (12) ein, so ergiebt sich

$$(15)\quad\cdots\quad\sin am\,u=\sqrt{\frac{1}{k}}\cdot\frac{H(u)}{\Theta(u)}.$$

Aus (11) aber erhält man $H(u)$ in ein unendliches Product entwickelt, nämlich

$$(16)\quad H(u)=2\sqrt[4]{q}\prod_1^\infty(1-q^{2h})\sin\frac{\pi u}{2K}(1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}).$$

Setzt man hierin endlich $u+K$ für u, so erhält man

$$(17)\cdot\cdot\quad H(u+K)=2\sqrt[4]{q}\prod_1^\infty(1-q^{2h})\cos\frac{\pi u}{2K}(1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}).$$

*) Fundamenta. § 61. § 63.

Digitized by Google

Hierin ist aber das unendliche Product der Zähler der Entwickelung für cos *am u* [(18) § 57]. Da nun folgt:

$$\frac{H(u+K)}{\Theta(u)} = 2\sqrt[4]{q}\,\cos\frac{\pi u}{2K}\prod_{1}^{\infty}{}^{h}\frac{1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}},$$

so ergiebt sich

$$\cos am\, u = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{H(u+K)}{\Theta(u)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

In eine Reihe entwickelt ergiebt sich aus (13)

$$\left.\begin{aligned} H(u+K) = 2\Big\{&\sqrt[4]{q}\,\cos\frac{\pi u}{2K} + \sqrt[4]{q}\,\cos 3\frac{\pi u}{2K} \\ &+ \sqrt[4]{q^{25}}\cos 5\frac{\pi u}{2K} + \cdots\Big\}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (19)$$

Endlich folgt aus (14), weil $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$ ist,

$$H(u+K) = \sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi i u}{2K}}\,\Theta(u+K+iK'). \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Hiedurch ist nun erwiesen, dass auch sin *am u*, cos *am u* und Δ *am u* allein von der Jacobi'schen Function abhängen, indem ihre Zähler Jacobi'sche Functionen mit den Argumenten $u+iK'$, $u+K+iK'$ und $u+K$ sind. Alsdann erhält man eine neue Reihenentwickelung für die elliptischen Functionen in Form von Brüchen, deren Zähler und Nenner sehr stark convergirende Reihen sind. Nämlich es ist nun

$$\left.\begin{aligned} \sin am\, u &= \sqrt{\frac{1}{k}}\cdot\frac{H(u)}{\Theta(u)} \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{k}}\cdot\frac{\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K} - \sqrt[4]{q^9}\sin 3\frac{\pi u}{2K} + \sqrt[4]{q^{25}}\sin 5\frac{\pi u}{2K} + \cdots}{1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\cos 2\frac{\pi u}{K}-2q^9\cos 3\frac{\pi u}{K}+\cdots}, \\ \cos am\, u &= \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{H(u+K)}{\Theta(u)} \\ &= 2\sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi u}{2K} + \sqrt[4]{q^9}\cos 3\frac{\pi u}{2K} + \sqrt[4]{q^{25}}\cos 5\frac{\pi u}{2K} + \cdots}{1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\cos 2\frac{\pi u}{K}-2q^9\cos 3\frac{\pi u}{K}+\cdots}, \\ \Delta am\, u &= \sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)} \\ &= \sqrt{k'}\cdot\frac{1+2q\cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\cos 2\frac{\pi u}{K}+2q^9\cos 3\frac{\pi u}{K}+\cdots}{1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\cos 2\frac{\pi u}{K}-2q^9\cos 3\frac{\pi u}{K}+\cdots}. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Digitized by Google

Durch die Jacobi'sche Function allein ausgedrückt aber hat man

$$\sin am\, u = \frac{\sqrt[4]{q}}{i\sqrt{k}}\, e^{\frac{\pi i u}{2K}}\, \frac{\Theta(u + iK')}{\Theta(u)},$$

$$\cos am\, u = \sqrt{\frac{k'}{k}}\, \sqrt[4]{q}\, e^{\frac{\pi i u}{2K}}\, \frac{\Theta(u + K + iK')}{\Theta(u)},$$

$$\Delta am\, u = \sqrt{k'}\, \frac{\Theta(u + K)}{\Theta(u)}.$$

Es war ferner (S. 275)

$$Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

und aus der Reihe (6) § 65 für die Jacobi'sche Function erhält man durch Differentiation

$$\Theta'(u) = \frac{2\pi}{K}\left\{q \sin\frac{\pi u}{K} - 2q^4 \sin\frac{2\pi u}{K} + 3q^9 \sin\frac{3\pi u}{K} - \cdots\right\};$$

folglich ist

$$Z(u) = \frac{2\pi}{K} \cdot \frac{q \sin\frac{\pi u}{K} - 2q^4 \sin\frac{2\pi u}{K} + 3q^9 \sin\frac{3\pi u}{K} - \cdots}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9 \cos\frac{3\pi u}{K} + \cdots}.$$

Endlich ergiebt sich aus der Gleichung (1) § 67

$$\Pi(u, a) = u Z(a) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)}$$

für die dritte Gattung die Reihe:

$$\Pi(u,a) = u Z(a) + \tfrac{1}{2}\log \frac{1 - 2q\cos\frac{\pi(u-a)}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi(u-a)}{K} - \cdots}{1 - 2q\cos\frac{\pi(u+a)}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi(u+a)}{K} - \cdots}.$$

Aus der Reihe (13) für $H(u)$ folgt unmittelbar

$$H(0) = 0, \quad H(-u) = -H(u), \quad H(u + 4K) = H(u),$$
$$H(u + 2K) = -H(u),$$

so dass H mit dem Index $4K$ periodisch ist. Ferner folgt aus (18)

$$H(K) = \sqrt{\frac{k}{k'}}\, \Theta(0);$$

es war aber [(12) § 65]

$$\Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}};$$

Digitized by Google

mithin erhält man mit Berücksichtigung des aus der Reihe (13) für $H(u)$ folgenden Werthes von $H(K)$

$$H(K) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = 2\left\{\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \sqrt[4]{q^{25}} + \cdots\right\}.$$

Da endlich auch [(12) § 65]

$$\Theta(K) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}$$

ist, so folgt

$$\sqrt{k} = \frac{H(K)}{\Theta(K)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta(K)},$$

oder

$$\sqrt{k} = 2\frac{\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \sqrt[4]{q^{25}} + \sqrt[4]{q^{49}} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots},$$

$$\sqrt{k'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots},$$

wodurch k und k' unmittelbar aus q berechnet werden können.

Achtzehnter Abschnitt.

Ueber die elliptischen Transcendenten der dritten Gattung.

§ 69.

Wir gehen nun zu einer genaueren Betrachtung der elliptischen Transcendenten der dritten Gattung, namentlich zur Untersuchung der verschiedenen, bei ihr zu unterscheidenden Fälle über.

Das elliptische Integral der dritten Gattung hatte nach *Legendre* die Form

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi},$$

und wir haben § 21 gesehen, dass es mit der Jacobi'schen Transcendenten Π in der Beziehung

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = u + \frac{\operatorname{tg} am\, a}{\Delta\, am\, a}\,\Pi(u, a)$$

steht, wenn

Digitized by Google

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u \quad \text{und} \quad n = -k^2 \sin^2 am\, a$$

gesetzt wird. Die Grösse n konnte sowohl reell als auch imaginär sein. Wir behandeln nun zunächst den Fall eines reellen n; dann erhellt, dass der Parameter a nur dann reell ausfällt, wenn n ein negativer echter Bruch ist, der zwischen 0 und $-k^2$ liegt. Ferner entsprechen einander folgende Intervalle:

sin $am\, a$ zwischen 0 und 1, n zwischen 0 und $-k^2$,

sin $am\, a$ „ 1 „ $\frac{1}{k}$, n „ $-k^2$ „ -1,

sin $am\, a$ „ $\frac{1}{k}$ „ ∞, n „ -1 „ $-\infty$,

sin $am\, a$ rein imaginär, n positiv.

Nun wächst aber a von 0 bis K, wenn sin $am\, a$ von 0 bis 1 zunimmt. Wird sin $am\, a$ grösser als 1, so zeigen die Formeln (§ 10)

$$\sin am\,(iu + K) = \frac{1}{\Delta\, am\,(u, k')} = \frac{1}{k}\, \Delta\, am\,(K' - u, k'),$$

$$\sin am\,(iK' + K) = \frac{1}{k},$$

dass a in die Form $iu + K$ übergeht, in welcher u von 0 bis K' wächst, während sin $am\, a$ von 1 bis $\frac{1}{k}$ zunimmt. Wird nun sin $am\, a$ noch grösser als $\frac{1}{k}$, so zeigen die Formeln

$$\sin am\,(K + iK') = \frac{1}{k}, \quad \sin am\,(u + iK') = \frac{1}{k \sin am\, u},$$

$$\sin am\, iK' = \infty,$$

dass nun a in die Form $u + iK'$ übergeht, in welcher u von K bis 0 abnimmt, während sin $am\, a$ von $\frac{1}{k}$ bis ∞ wächst. Also hat man folgende entsprechende Intervalle:

sin $am\, a$ zwischen 0 und 1, a zwischen 0 und K,

sin $am\, a$ „ 1 „ $\frac{1}{k}$, a „ K „ $K + iK'$,

sin $am\, a$ „ $\frac{1}{k}$ „ ∞, a „ $K + iK'$ und iK'.

Wenn endlich sin $am\, a$ rein imaginär ist, so nimmt wegen der Formel

$$\sin am\,(iu, k) = i \operatorname{tg} am\,(u, k')$$

Digitized by Google

a die Form iu an. Hieraus geht nun hervor, dass man für die verschiedenen Intervalle, in denen n liegen kann, folgende Werthe für n zu setzen hat:

1) n zwischen 0 und $-k^2$, $n = -k^2 \sin^2 am\, a$,
2) n „ $-k^2$ „ -1, $n = -k^2 \sin^2 am\,(ia + K)$,
3) n „ -1 „ $-\infty$, $n = -k^2 \sin^2 am\,(a + iK')$,
4) n „ $+\infty$ „ 0, $n = -k^2 \sin^2 am\, ia$,

wobei dann a in allen vier Fällen reell ist. *Legendre**) hat gezeigt, dass man die beiden letzten Fälle auf die beiden ersten reduciren kann. Wir kommen darauf unten zurück, zuvor aber wollen wir die in allen vier Fällen dienlichen Formeln zur Verwandlung der Legendre'schen Form in die Jacobi'sche zusammenstellen. Es kommt dabei nur auf die Werthe des Ausdrucks $\frac{\mathrm{tg}\, am\, a}{\Delta\, am\, a}$ an, wenn an die Stelle von a die Argumente $ia + K$, $a + iK'$ und ia treten. Da man aber nach den Formeln des § 8 und § 10 hat

$$\frac{\mathrm{tg}\, am\,(ia+K)}{\Delta\, am\,(ia+K)} = i\,\frac{\Delta\, am\,(a,k')}{k'^2 \sin am\,(a,k') \cos am\,(a,k')},$$

$$\frac{\mathrm{tg}\, am\,(a+iK')}{\Delta\, am\,(a+iK')} = -\frac{\mathrm{tg}\, am\, a}{\Delta\, am\, a},$$

$$\frac{\mathrm{tg}\, am\, ia}{\Delta\, am\, ia} = i\,\frac{\sin am\,(a,k') \cos am\,(a,k')}{\Delta\, am\,(a,k')},$$

so erhält man folgende Reductionsformeln:

1) n zwischen 0 und $-k^2$, $n = -k^2 \sin^2 am\, a$,

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi} = u + \frac{\mathrm{tg}\, am\, a}{\Delta\, am\, a}\,\Pi(u, a);$$

2) n zwischen $-k^2$ und -1, $n = -k^2 \sin^2 am\,(ia + K)$,

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi} = u + \frac{\Delta am\,(a,k')}{k'^2 \sin am\,(a,k') \cos am\,(a,k')}\, i\Pi(u, ia+K);$$

3) n zwischen -1 und $-\infty$, $n = -k^2 \sin^2 am\,(a+iK')$,

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi} = u - \frac{\mathrm{tg}\, am\, a}{\Delta\, am\, a}\,\Pi(u, a+iK');$$

---

*) *Legendre*, Exercices I. p. 68 ff. Traité I. Chap XV.

Digitized by Google

4) n positiv, $n = -k^2 \sin^2 am\, ia$,

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi} = u + \frac{\sin am(a,k')\cos am(a,k')}{\Delta am(a,k')} i\,\Pi(u, ia),$$

wobei in allen Fällen $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u$ gesetzt ist.

Wir behandeln nun noch den Fall, dass die Grösse n selbst imaginär ist, und werden zeigen, dass man dann dieselbe auf die Form $-k^2 \sin^2 am(a+ib)$ bringen kann, wo a und b reell sind*). Es sei

$$n = p + iq$$

eine beliebige complexe Grösse; man setze

$$-(p+iq) = k^2 \sin^2 am\,(a+ib),$$

also auch

$$-(p-iq) = k^2 \sin^2 am\,(a-ib),$$

dann folgt zunächst

$$k^2 + (p \pm iq) = k^2 \cos^2 am\,(a \pm ib),$$
$$1 + (p \pm iq) = \Delta^2 am\,(a \pm ib).$$

Setzt man nun ferner

$$-p - iq = \varrho^2\ (\cos 2\theta + i \sin 2\theta),$$
$$k^2 + p + iq = \varrho'^2\ (\cos 2\theta' + i \sin 2\theta'),$$
$$1 + p + iq = \varrho''^2 (\cos 2\theta'' + i \sin 2\theta''),$$

so kann man ϱ, ϱ', ϱ'', θ, θ', θ'' aus den gegebenen Grössen k, p, q bestimmen. Alsdann ist

$$k \sin am\,(a+ib) = \varrho\ (\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$k \cos am\,(a+ib) = \varrho'\ (\cos\theta' + i\sin\theta'),$$
$$\Delta am\,(a+ib) = \varrho''\ (\cos\theta'' + i\sin\theta''),$$
$$k \sin am\,(a-ib) = \varrho\ (\cos\theta - i\sin\theta),$$
$$k \cos am\,(a-ib) = \varrho'\ (\cos\theta' - i\sin\theta'),$$
$$\Delta am\,(a-ib) = \varrho''\ (\cos\theta'' - i\sin\theta'').$$

Da nun

$$2a = (a+ib) + (a-ib),$$
$$2bi = (a+ib) - (a-ib)$$

*) Vgl. *Richelot*, Darstellung einer beliebigen gegebenen Grösse durch $\sin am\,(u+w, k)$. Crelle's Journ. Bd. 45.

Digitized by Google

ist, so erhält man nach den Fundamentalformeln (§ 29):

$$\sin am\,(u \pm v) = \frac{\sin am\,u \cos am\,v\, \Delta am\,v \pm \sin am\,v \cos am\,u\, \Delta am\,u}{1 - k^2 \sin^2 am\,u \sin^2 am\,v},$$

$$\cos am\,(u \pm v) = \frac{\cos am\,u \cos am\,v \mp \sin am\,u \sin am\,v\, \Delta am\,u\, \Delta am\,v}{1 - k^2 \sin^2 am\,u \sin^2 am\,v},$$

$$\sin am\,2a = \frac{\varrho\varrho'\varrho''}{k^2} \cdot \frac{\cos(\theta - \theta' - \theta'') + i \sin(\theta - \theta' - \theta'')}{1 - \frac{\varrho^4}{k^2}}$$

$$+ \frac{\varrho\varrho'\varrho''}{k^2} \cdot \frac{\cos(-\theta + \theta' + \theta'') + i \sin(-\theta + \theta' + \theta'')}{1 - \frac{\varrho^4}{k^2}},$$

also

$$\sin am\,2a = \frac{2\varrho\,\varrho'\varrho''\cos(\theta - \theta' - \theta'')}{k^2 - \varrho^4},$$

und auf dieselbe Weise

$$\sin am\,2bi = \frac{2i\,\varrho\,\varrho'\varrho''\sin(\theta - \theta' - \theta'')}{k^2 - \varrho^4},$$

$$\cos am\,2a = \frac{\frac{\varrho'^2}{k^2} - \frac{\varrho^2\varrho''^2}{k^2}}{1 - \frac{\varrho^4}{k^2}} = \frac{\varrho'^2 - \varrho^2\varrho''^2}{k^2 - \varrho^4},$$

$$\cos am\,2bi = \frac{\varrho'^2 + \varrho^2\varrho''^2}{k^2 - \varrho^4}.$$

Demnach

$$\operatorname{tg} am\,2a = \frac{2\varrho\,\varrho'\varrho''}{\varrho'^2 - \varrho^2\varrho''^2}\cos(\theta - \theta' - \theta''),$$

$$\operatorname{tg} am\,2bi = \frac{2i\varrho\,\varrho'\varrho''}{\varrho'^2 + \varrho^2\varrho''^2}\sin(\theta - \theta' - \theta'').$$

Setzt man aber

$$\frac{\varrho\,\varrho''}{\varrho'} = \operatorname{tg}\alpha,$$

so ist

$$\frac{2\varrho\,\varrho'\varrho''}{\varrho'^2 - \varrho^2\varrho''^2} = \operatorname{tg} 2\alpha, \quad \frac{2\varrho\,\varrho'\varrho''}{\varrho'^2 + \varrho^2\varrho''^2} = \sin 2\alpha,$$

also, wenn man sich erinnert, dass (§ 8)

$$\operatorname{tg} am\,2bi = i \sin am\,(2b, k')$$

ist,

$$\operatorname{tg} am\,2a = \operatorname{tg} 2\alpha \cos(\theta - \theta' - \theta''),$$
$$\sin am\,(2b, k') = \sin 2\alpha \sin(\theta - \theta' - \theta''),$$

wodurch a und b gegeben sind.

Digitized by Google

§ 70.

Zur Erledigung aller im vorigen Paragraph aufgestellten Fälle bedürfen wir jetzt der Kenntniss der Functionen E, Z und Θ für imaginäre Argumente. Ehe wir aber zur Ermittelung derselben übergehen, haben wir zuvor einen wichtigen Satz abzuleiten, der von den vollständigen Integralen der ersten und zweiten Gattung gilt und von *Legendre* herrührt. Bezeichnen nämlich K und K' die vollständigen Integrale der ersten Gattung mit den Moduln k und k', ferner E und E' die vollständigen Integrale der zweiten Gattung mit denselben Moduln, so hat *Legendre**) bewiesen, dass

$$\text{(A)} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad K'E + KE' - KK' = \frac{\pi}{2}$$

ist.

Wir betrachten K und E als Functionen von k^2 und suchen zunächst ihre Differentialquotienten nach k^2 auf. Dazu sei der Kürze wegen

$$k^2 = c, \quad k'^2 = c'$$

gesetzt, sodass $c + c' = 1$ ist. Dann ist auch

$$\frac{dc'}{dc} = -1.$$

Man bemerke zugleich, dass, wenn $f(c)$ eine beliebige Function von c ist, man

$$\frac{df(c)}{dc'} = -\frac{df(c)}{dc}$$

hat. Endlich merke man auch gleich die Formel

$$\frac{d(cc')}{dc} = c' - c.$$

Nun ist

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - c\sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi\, d\varphi,$$

*) *Legendre*, Exercises du calcul intégral. I. p. 61 ff., und Traité des fonctions elliptiques. I. Chap. XII. XIII.

Digitized by Google

und analog

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c' \sin^2\varphi}}; \quad E' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - c' \sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Daraus folgt

$$\frac{dK}{dc} = \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3\varphi}; \quad \frac{dE}{dc} = -\tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Um diese Integrale durch K und E auszudrücken, setze man im ersten

$$\sin^2\varphi = \frac{1 - \Delta^2\varphi}{k^2},$$

so erhält man

$$\frac{dK}{dc} = \frac{1}{2k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi} - \frac{1}{2k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Nun fanden wir S. 72

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi} = -\frac{k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{k'^2\,\Delta\varphi} + \frac{E_1(\varphi)}{k'^2}.$$

Demnach ergiebt sich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi} = \frac{E}{k'^2}\ *),$$

*) Diese Formel ergiebt sich einfacher mit Hülfe der identischen Gleichung

$$d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1 - 2\sin^2\varphi + k^2\sin^4\varphi}{\Delta^3\varphi}\, d\varphi,$$

aus welcher folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2\sin^2\varphi + k^2\sin^4\varphi}{\Delta^3\varphi}\, d\varphi = \left[\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Setzt man darin $k^2\sin^2\varphi = 1 - \Delta^2\varphi$, so erhält man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-k'^2 + \Delta^4\varphi}{k^2\,\Delta^3\varphi}\, d\varphi = 0,$$

also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi} = \frac{1}{k'^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi\, d\varphi = \frac{E}{k'^2}.$$

Digitized by Google

und dann

$$(1) \quad \ldots \ldots \quad \frac{dK}{dc} = \frac{E}{2cc'} - \frac{K}{2c}.$$

Der Ausdruck für $\frac{dE}{dc}$ ergiebt sich unmittelbar aus der § 19 (32) gefundenen Formel

$$\int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{F(\varphi) - E_1(\varphi)}{k^2},$$

nämlich

$$(2) \quad \ldots \ldots \quad \frac{dE}{dc} = \frac{E-K}{2c}.$$

Aus (1) und (2) ergiebt sich noch

$$(3) \quad \ldots \ldots \quad \frac{d(K-E)}{dc} = \frac{E}{2c'}.$$

Man kann nun aus (1) und (2) zwei Differentialgleichungen herstellen, von welchen die eine nur K, die andere nur E enthält, indem man nämlich beide auf's Neue nach c differentiirt und dann einmal E, das andere Mal K eliminirt. Durch Differentiation von (1) folgt

$$\frac{d^2K}{dc^2} = \frac{1}{2cc'} \cdot \frac{dE}{dc} - \frac{c'-c}{2c^2c'^2} E - \frac{1}{2c} \cdot \frac{dK}{dc} + \frac{K}{2c^2},$$

und wenn man darin die Werthe von $\frac{dE}{dc}$ und $\frac{dK}{dc}$ substituirt und reducirt

$$\frac{d^2K}{dc^2} = \frac{2c'-c}{4c^2c'} K - \frac{c'-c}{2c^2c'^2} E.$$

Um nun hieraus E zu eliminiren, zieht man aus (1)

$$\frac{c'-c}{cc'} \cdot \frac{dK}{dc} = \frac{c'-c}{2c^2c'^2} E - \frac{c'-c}{2c^2c'} K,$$

und addirt man dies zur vorigen Gleichung, so ergiebt sich

$$\frac{d^2K}{dc^2} + \frac{c'-c}{cc'} \cdot \frac{dK}{dc} = \frac{K}{4cc'},$$

oder

$$(4) \quad \ldots \quad 4cc' \frac{d^2K}{dc^2} + 4(c'-c) \frac{dK}{dc} - K = 0.$$

Dieses ist eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher K als Function von c genügen muss. Denkt man an die Stelle von K irgend einen andern Buchstaben gesetzt, z. B. x, so ist also $x = K$ eine Lösung dieser Differentialgleichung, aber nur eine particuläre, weil sie keine

Digitized by Google

willkürliche Constante enthält. Nun ist aber leicht zu zeigen, dass auch $x = K'$ eine particuläre Lösung der nämlichen Gleichung ist, d. h. dass K' ebenfalls der Gleichung (4) genügt. Da nämlich K' dieselbe Function von c' ist, wie K von c, so wird die Gleichung (4) ihre Gültigkeit nicht verlieren, wenn man c mit c' und zugleich K mit K' vertauscht. Demnach hat man auch die Gleichung

$$4cc'\frac{d^2K'}{dc'^2} - 4(c' - c)\frac{dK'}{dc'} - K' = 0.$$

Nun ist aber, wie oben bemerkt, wegen $\frac{dc'}{dc} = -1$

$$\frac{dK'}{dc'} = -\frac{dK'}{dc} \quad \text{und} \quad \frac{d^2K'}{dc'^2} = +\frac{d^2K'}{dc^2},$$

folglich ist auch

$$4cc'\frac{d^2K'}{dc^2} + 4(c' - c)\frac{dK'}{dc} - K' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

d. h. es genügt auch K' der Differentialgleichung (4). Da nun diese linear und homogen ist, so lässt sich auch die vollständige Lösung angeben, nämlich, bezeichnen a und b zwei willkürliche Constanten, so ist

$$x = aK + bK'$$

die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$4cc'\frac{d^2x}{dc^2} + 4(c' - c)\frac{dx}{dc} - x = 0.$$

Ebenso lässt sich auch eine Differentialgleichung für E aufstellen und vollständig integriren, was hier, obgleich es zu unserem eigentlichen Zwecke nicht nothwendig wäre, gleich mit angeschlossen werden möge.

Durch Differentiation der Gleichung (2) ergiebt sich

$$\frac{d^2E}{dc^2} = -\frac{E - K}{2c^2} + \frac{1}{2c}\cdot\frac{d(E - K)}{dc},$$

und durch Substitution des Werthes (3) von $\frac{d(E-K)}{dc}$ und Reduction

$$\frac{d^2E}{dc^2} = \frac{K}{2c^2} - \frac{1 + c'}{4c^2c'}E.$$

Addirt man hiezu die aus (2) fliessende Gleichung

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{dE}{dc} = \frac{E}{2c^2} - \frac{K}{2c^2},$$

Digitized by Google

so folgt

$$\frac{d^2E}{dc^2} + \frac{1}{c} \cdot \frac{dE}{dc} = -\frac{E}{4cc'},$$

oder

$$4cc' \frac{d^2E}{dc^2} + 4c' \frac{dE}{dc} + E = 0.$$

Dieses ist die Differentialgleichung, von welcher $y = E$ eine particuläre Lösung ist, wenn mit y die durch die Gleichung zu bestimmende Function bezeichnet wird. Ihr genügt aber nicht auch E', man kann jedoch, um eine zweite particuläre Lösung zu finden, die Gleichung (1) benutzen, die sich auch schreiben lässt

$$E = 2cc' \frac{dK}{dc} + c'K.$$

Setzt man darin nämlich y und x an die Stelle von E und K, so ist

$$y = 2cc' \frac{dx}{dc} + c'x,$$

und diese Gleichung kann man benutzen, um aus den beiden particulären Werthen von x die entsprechenden von y zu finden. Für $x = K$ ergiebt sich nämlich wie natürlich $y = E$, für $x = K'$ aber erhält man

$$y = 2cc' \frac{dK'}{dc} + c'K',$$

oder weil

(6) . . . . . $\frac{dK'}{dc} = -\frac{dK'}{dc'} = \frac{K'}{2c'} - \frac{E'}{2cc'}$

ist

$$y = -E' + cK' + c'K' = K' - E'.$$

Demnach ist $K' - E'$ die zweite particuläre, und

$$y = a_1 E + b_1 (K' - E')$$

die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$4cc' \frac{d^2y}{dc^2} + 4c' \frac{dy}{dc} + y = 0$$

mit den willkürlichen Constanten a_1 und b_1.

Um nun zum Beweise der Gleichung (A) zu schreiten, kehren wir jetzt zu den Gleichungen (4) und (5) zurück, die wir mit einander combiniren. Multiplicirt man nämlich die erste derselben mit K' und die andere mit K, so ergiebt die Substraction der Producte

$$cc' \left(K' \frac{d^2K}{dc^2} - K \frac{d^2K'}{dc^2} \right) + (c' - c) \left(K' \frac{dK}{dc} - K \frac{dK'}{dc} \right) = 0.$$

Digitized by Google

Bemerkt man nun, dass

$$K\frac{d^2K}{dc^2} - K\frac{d^2K'}{dc^2} = \frac{d\left(K'\frac{dK}{dc} - K\frac{dK'}{dc}\right)}{dc}$$

$$c' - c = \frac{d(cc')}{dc}$$

ist, so sieht man, dass die vorige Gleichung links ein vollständiges Differential hat. Bezeichnet daher C eine constante, d. h. von c oder k^2 unabhängige Grösse, so erhält man durch Integration

$$cc'\left(K'\frac{dK}{dc} - K\frac{dK'}{dc}\right) = C.$$

Substituirt man darin die in (1) und (6) ermittelten Werthe

$$\frac{dK}{dc} = \frac{E}{2cc'} - \frac{K}{2c}, \quad \frac{dK'}{dc} = \frac{K'}{2c'} - \frac{E'}{2cc'},$$

so ergiebt sich

$$K'E + KE' - KK' = 2C.$$

Hiemit ist zunächt bewiesen, dass der Ausdruck $K'E + KE' - KK'$ einen von dem Modul k unabhängigen Werth haben, also einer absoluten Zahl $2C$ gleich sein muss. Um die letztere zu finden, kehren wir zu den Integralen zurück. Denn da

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi\, d\varphi$$

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k')}, \quad E' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\psi, k')\, d\psi$$

ist, so erhält man

$$2C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k')} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi\, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\psi, k')\, d\psi$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k')}.$$

Weil aber die Variablen φ und ψ von einander unabhängig sind, so gehen die Producte der Integrale in Doppelintegrale über, und man hat auch

Digitized by Google

$$2C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta^2\varphi + \Delta^2(\psi, k') - 1}{\Delta\varphi\,\Delta(\psi, k')}\, d\varphi\, d\psi.$$

Dieses Integral muss nach dem Vorigen für jeden Werth von k denselben Werth besitzen. Man braucht seinen Werth daher nur für $k = 0$ zu ermitteln, dann ist

$$k' = 1, \quad \Delta\varphi = 1, \quad \Delta(\psi, k') = \cos\psi;$$

also

$$2C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\psi\, d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\psi = \frac{\pi}{2},$$

folglich, was zu beweisen war,

$$K'E + KE' - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

§ 71.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Functionen Z und Θ für die Argumente iu, $iu + K$ und $u + iK'$ über*). Nach der Definition § 19 ist

$$E(iu) = \int_0^{iu} \Delta^2 am\, z\, dz,$$

oder, wenn man $z = iv$ setzt und die Formel (12) § 8

$$\Delta\, am\, iv = \frac{\Delta\, am\,(v, k')}{\cos am\,(v, k')}$$

anwendet,

$$E(iu) = i \int_0^{u} \frac{\Delta^2 am\,(v, k')}{\cos^2 am\,(v, k')}\, dv.$$

Setzt man darin nach § 3

$$\Delta^2 am\,(v, k') = k^2 + k'^2 \cos^2 am\,(v, k'),$$

so erhält man

$$E(iu) = ik^2 \int_0^{u} \frac{dv}{\cos^2 am\,(v, k')} + ik'^2 u.$$

*) *Jacobi*, Fundamenta nova. § 56 ff.

Digitized by Google

Nach S. 73 aber ist

$$\int_0^u \frac{dv}{\cos^2 am\,(v,k')} = \frac{1}{k^2}\,\mathrm{tg}\,am\,(u,k')\,\Delta\,am\,(u,k') + u - \frac{1}{k^2}E(u,k'),$$

folglich wird

$$E(iu) = i\,\mathrm{tg}\,am\,(u,k')\,\Delta\,am\,(u,k') - iE(u,k') + iu.$$

Führt man darin nun die Function Z ein, so ist nach § 63 (14)

$$E(iu) = i\,\frac{E}{K}\,u + Z(iu);\quad E(u,k') = \frac{E'}{K'}\,u + Z(u,k').$$

also erhält man

$$i\frac{E}{K}u + Z(iu) = i\,\mathrm{tg}\,am\,(u,k')\,\Delta\,am\,(u,k') - i\frac{E'}{K'}u - iZ(u,k') + iu,$$

$$iZ(iu) = -\mathrm{tg}\,am\,(u,k')\,\Delta\,am\,(u,k') + u\left(\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1\right) + Z(u,k').$$

Nun ist nach dem im vorigen Paragraph bewiesenen Satze:

$$\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1 = \frac{EK' + E'K - KK'}{KK'} = \frac{\pi}{2KK'},$$

folglich wird

$$iZ(iu) = -\mathrm{tg}\,am\,(u,k')\,\Delta\,am\,(u,k') + \frac{\pi u}{2KK'} + Z(u,k'), \quad (1)$$

welches der gesuchte Ausdruck für $Z(iu)$ ist.

Daraus folgt durch Integration sogleich $\Theta(iu)$. Es ist nämlich § 67 (5)

$$\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \int_0^u Z(u)\,du,$$

also

$$\log\frac{\Theta(iu)}{\Theta(0)} = \int_0^{iu} Z(v)\,dv = i\int_0^u Z(iv)\,dv,$$

und

$$\int_0^u Z(u,k')\,du = \log\frac{\Theta(u,k')}{\Theta(0,k')}.$$

Da nun ferner

$$-\mathrm{tg}\,am\,(u,k')\,\Delta\,am\,(u,k') = \frac{d\log\cos am\,(u,k')}{du}$$

ist, so erhält man aus (1)

$$\log\frac{\Theta(iu)}{\Theta(0)} = \log\cos am\,(u,k') + \frac{\pi u^2}{4KK'} + \log\frac{\Theta(u,k')}{\Theta(0,k')},$$

Digitized by Google

oder

$$(2) \quad \cdot \cdot \quad \frac{\Theta(iu)}{\Theta(0)} = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cos am(u, k') \frac{\Theta(u, k')}{\Theta(0, k')}.$$

Hieraus lassen sich zuerst unsere früheren Formeln für $\Theta(u + iK')$ und $\Theta(u + 2iK')$ nochmals ableiten. Durch Substitution von $u + K'$ für u und nachherige Vertauschung von iu mit u ergiebt sich wie oben

$$(3) \quad \cdot \cdot \quad \Theta(u + iK') = \frac{i\sqrt{k}}{\sqrt{q}} e^{-\frac{i\pi u}{2K}} \sin am\, u\, \Theta(u),$$

und wenn man nochmals $u + iK'$ statt u setzt, oder auch in (2) $u + 2K'$ statt u substituirt,

$$\Theta(u + 2iK') = -\frac{1}{q} e^{-\frac{i\pi u}{K}} \Theta(u).$$

Durch logarithmische Differentiation folgt dann:

$$(4) \quad \begin{cases} Z(u + iK') = -\frac{i\pi}{2K} + \operatorname{cotg} am\, u\, \Delta am\, u + Z(u), \\ Z(u + 2iK') = -\frac{i\pi}{K} + Z(u), \end{cases}$$

woraus auch noch die speciellen Formeln

$$\Theta(iK') = 0, \qquad Z(iK') = \infty,$$

$$\Theta(2iK') = -\frac{\Theta(0)}{q} = -\frac{1}{q}\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}, \quad Z(2iK') = -\frac{i\pi}{K}\ *)$$

fliessen.

Ein Ausdruck für $\Theta(iu + K)$ ergiebt sich, wenn man in der Formel (8) § 67

$$\Theta(u + K) = \sqrt{\frac{1}{k'}}\, \Delta am\, u\, \Theta(u)$$

iu für u setzt, und ausser der Formel (2) auch noch die Gleichung

$$\Delta am(iu) = \frac{\Delta am(u, k')}{\cos am(u, k')}$$

anwendet. Dann wird zunächst

$$\Theta(iu + K) = \sqrt{\frac{1}{k'}} \cdot \frac{\Delta am(u, k')}{\cos am(u, k')} \Theta(iu),$$

*) Hienach ist der Druckfehler in § 57. 5) der Fundamenta zu verbessern.

Digitized by Google

also wenn man mit $\Theta(0)$ dividirt und (2) einsetzt

$$\frac{\Theta(iu+K)}{\Theta(0)} = \sqrt{\frac{1}{k'}}\, e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}\, \Delta\, am(u, k')\, \frac{\Theta(u, k')}{\Theta(0, k')}, \quad \cdot \quad (5)$$

oder da auch

$$\Theta(u+K', k') = \sqrt{\frac{1}{k}}\, \Delta\, am(u, k')\, \Theta(u, k')$$

ist,

$$\frac{\Theta(iu+K)}{\Theta(0)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\, e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}\, \frac{\Theta(u+K', k')}{\Theta(0, k')} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (6)$$

Man bemerke dabei, dass nach (12) § 65

$$\Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}, \text{ also } \Theta(0, k') = \sqrt{\frac{2kK'}{\pi}}$$

und folglich

$$\frac{\Theta(0)}{\Theta(0, k')} = \sqrt{\frac{k'K}{kK'}}$$

ist. Substituirt man dies noch in (5) und (6), so erhält man auch

$$\left.\begin{aligned} \Theta(iu+K) &= \sqrt{\frac{K}{kK'}}\, e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}\, \Delta\, am(u, k')\, \Theta(u, k') \\ &= \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}\, \Theta(u+K', k'). \end{aligned}\right\} \cdot \quad (7)$$

Nimmt man in den Formeln (5) und (6) die Logarithmen und differentiirt, so erhält man $Z(iu+K)$, nämlich

$$\left.\begin{aligned} iZ(iu+K) &= \frac{\pi u}{2KK'} + Z(u+K', k') \\ &= \frac{\pi u}{2KK'} - \frac{k'^2 \sin am(u, k') \cos am(u, k')}{\Delta\, am(u, k')} + Z(u, k'). \end{aligned}\right\} \cdot \quad (8)$$

§ 72.

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir nun zu den im § 69 aufgestellten vier Fällen zurück, und wollen zeigen, dass sich der 3te und 4te Fall resp. auf den 1sten und 2ten reduciren lässt. Den Ausgangspunct bildet die Grundformel (1) § 67

$$\Pi(u, a) = u\, Z(a) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (9)$$

Nun war im dritten Fall der Parameter $a + iK'$; für denselben ist daher

$$\Pi(u, a+iK') = u\, Z(a+iK') + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-a-iK')}{\Theta(u+a+iK')} \cdot \quad (10)$$

Digitized by Google

Aus (4) und (3) des vorigen § aber folgt:

$$Z(a + iK') = -\frac{i\pi}{2K} + \operatorname{cotg} am\, a\, \Delta\, am\, a + Z(a)$$

$$\Theta(a \mp u + iK') = \frac{i\sqrt{k}}{\sqrt[4]{q}} e^{-\frac{i\pi(a \mp u)}{2K}} \sin am(a \mp u)\, \Theta(a \mp u),$$

mithin da

$$\Theta(a - u + iK') = \Theta(u - a - iK')$$

ist,

$$\log \frac{\Theta(u - a - iK')}{\Theta(u + a + iK')} = -\frac{i\pi(a - u)}{2K} + \frac{i\pi(a + u)}{2K} + \log \frac{\sin am(a - u)}{\sin am(a + u)} + \log \frac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)}.$$

Dieses nun in (10) substituirt, giebt

$$\Pi(u, a + iK') = -\frac{i\pi u}{2K} + u \operatorname{cotg} am\, a\, \Delta\, am\, a + u Z(a) + \frac{i\pi u}{2K} + \tfrac{1}{2} \log \frac{\sin am(a - u)}{\sin am(a + u)} + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)},$$

und wenn man die Formel (9) noch einmal anwendet,

$$(11)\quad \Pi(u, a + iK') = \Pi(u, a) + u \operatorname{cotg} am\, a\, \Delta\, am\, a + \tfrac{1}{2} \log \frac{\sin am(a - u)}{\sin am(a + u)},$$

wodurch der erste und dritte Fall auf einander reducirt sind.

Um nun zur Reductionsformel für den 2ten und 4ten Fall zu gelangen, setzen wir in (9) zuerst $a + K$ statt a, dann wird

$$(12)\quad \Pi(u, a + K) = u Z(a + K) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - a - K)}{\Theta(u + a + K)}.$$

Da nun aus (7) und (8) § 67

$$Z(a + K) = -\frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a}{\Delta\, am\, a} + Z(a)$$

$$\Theta(a \mp u + K) = \sqrt{\frac{1}{k'}}\, \Delta\, am(a \mp u)\, \Theta(a \mp u)$$

folgt, so erhält man

$$\Pi(u, a + K) = -u \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a}{\Delta\, am\, a} + u Z(a) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Delta\, am(a - u)}{\Delta\, am(a + u)} + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)}$$

$$= \Pi(u, a) - u \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a}{\Delta\, am\, a} + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Delta\, am(a - u)}{\Delta\, am(a + u)}.$$

Digitized by Google

In dieser Formel setze man nun ia statt a, so folgt

$$\left.\begin{aligned} \Pi(u, ia+K) = \Pi(u, ia) - u\frac{k^2 \sin am\, ia \cos am\, ia}{\Delta am\, ia} \\ + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Delta am(ia-u)}{\Delta am(ia+u)}. \end{aligned}\right\} \cdot \quad (13)$$

Nun ist aber [(32) § 29]

$$\frac{\Delta am(ia-u)}{\Delta am(ia+u)} = \frac{\Delta am\, ia\, \Delta am\, u + k^2 \sin am\, ia \cos am\, ia \sin am\, u \cos am\, u}{\Delta am\, ia\, \Delta am\, u - k^2 \sin am\, ia \cos am\, ia \sin am\, u \cos am\, u},$$

oder weil nach § 8

$$\sin am\, ia = i \operatorname{tg} am(a, k'), \quad \cos am\, ia = \frac{1}{\cos am(a, k')},$$

$$\Delta am\, ia = \frac{\Delta am(a, k')}{\cos am(a, k')}$$

ist,

$$\frac{\Delta am(ia-u)}{\Delta am(ia+u)} = \frac{\Delta am(a, k')\, \Delta am\, u + ik^2 \operatorname{tg} am(a, k') \sin am\, u \cos am\, u}{\Delta am(a, k')\, \Delta am\, u - ik^2 \operatorname{tg} am(a, k') \sin am\, u \cos am\, u}.$$

Da ferner

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{x+iy}{x-iy} = i \operatorname{arc tg}\frac{y}{x}$$

ist, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{\Delta am(ia-u)}{\Delta am(ia+u)} = i \operatorname{arc tg}\left\{\frac{k^2 \operatorname{tg} am(a, k')}{\Delta am(a, k')} \cdot \frac{\sin am\, u \cos am\, u}{\Delta am\, u}\right\}.$$

Ebenso wird

$$\frac{k^2 \sin am\, ia \cos am\, ia}{\Delta am\, ia} = ik^2 \frac{\operatorname{tg} am(a, k')}{\Delta am(a, k')}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\frac{k^2 \operatorname{tg} am(a, k')}{\Delta am(a, k')} = A,$$

so wird

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{\Delta am(ia-u)}{\Delta am(ia+u)} = i \operatorname{arc tg}\left\{A\frac{\sin am\, u \cos am\, u}{\Delta am\, u}\right\},$$

$$\frac{k^2 \sin am\, ia \cos am\, ia}{\Delta am\, ia} = iA,$$

und man erhält durch Substitution dieser Ausdrücke in (13) die gesuchte Reductionsformel für den 2ten und 4ten Fall, nämlich:

$$i\Pi(u, ia+K) = i\Pi(u, ia) + Au - \operatorname{arctg}\left(A\frac{\sin am\, u \cos am\, u}{\Delta am\, u}\right). \quad (14)$$

Legendre hat die elliptischen Integrale der dritten Gattung, je nachdem sie dem 1sten und 3ten oder dem 2ten und 4ten Falle angehören, durch besondere Namen unterschieden; und zwar, weil in der Reductionsformel (11) für den 1sten und 3ten Fall

Digitized by Google

ein Logarithmus vorkommt, so nennt er diese Klasse die logarithmische (*Intégrales à paramètre logarithmique*); die andere Klasse dagegen, welche dem 2ten und 4ten Fall angehört, heisst wegen des in der Reductionsformel (14) vorkommenden Arcus Tangens die circuläre (*Intégrales à paramètre circulaire*)*).

§ 73.

Wir haben oben § 69 gesehen, dass, wenn die Grösse n *Legendre*'s selbst imaginär ist, der Parameter complex von der Form $a + ib$ wird. In diesem Falle kommt also das Additionstheorem zur Anwendung, und zwar dasjenige für die Parameter. Wir schreiten zuerst zu einer neuen Ableitung des Additionstheorems für die Argumente.

Aus der Formel (9) des vorigen § erhält man

$$\Pi(u, a) = uZ(a) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)},$$

$$\Pi(v, a) = vZ(a) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(v-a)}{\Theta(v+a)},$$

$$\Pi(u+v, a) = (u+v)Z(a) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+v-a)}{\Theta(u+v+a)},$$

und wenn man die letzte Gleichung von der Summe der beiden ersteren abzieht:

$$\Pi(u, a) + \Pi(v, a) - \Pi(u+v, a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$
$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)\,\Theta(v-a)\,\Theta(u+v+a)}{\Theta(u+a)\,\Theta(v+a)\,\Theta(u+v-a)}.$$

Damit ist die Form des Additionstheorems, wie es in § 35 abgeleitet wurde, bereits hergestellt; es kommt nur noch darauf an, die unter dem Logarithmus stehende Grösse durch elliptische Functionen auszudrücken. Dazu bedürfen wir einer Relation, die sich aus der Gleichung (3) des § 67 ergiebt. Wir fanden

$$\frac{d\Pi(u, a)}{du} = Z(a) + \tfrac{1}{2}Z(u-a) - \tfrac{1}{2}Z(u+a).$$

Integrirt man diese Gleichung nach dem Parameter a zwischen den Grenzen 0 und a, so erhält man

$$\int_0^a \frac{\Pi(u, a)}{du}\,da = \int_0^a Z(a)da + \tfrac{1}{2}\int_0^a Z(u-a)\,da - \tfrac{1}{2}\int_0^a Z(u+a)da.$$

*) *Legendre*, Traité des Fonctions elliptiques. III. p. 138.

Digitized by Google

Allein wegen (4) und (5) § 67 ist

$$\int_0^a Z(a)\,da = \log\frac{\Theta(a)}{\Theta(0)};\quad \int_0^a Z(u-a)\,da = -\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u)},$$

$$\int_0^a Z(u+a)\,da = \log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u)},$$

also

$$\int_0^a \frac{d\,\Pi(u,a)}{du}\,da = \log\frac{\Theta(a)}{\Theta(0)} - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u)} - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u)}$$

$$= \log\frac{\Theta(a)}{\Theta(0)} - \tfrac{1}{2}\log\Theta(u-a)\Theta(u+a) + \log\Theta(u).$$

Andererseits aber hat man nach der Definition der Transcendenten Π

$$\frac{d\,\Pi(u,a)}{du} = \frac{k^2 \sin am\,a\,\cos am\,a\,\Delta am\,a\,\sin^2 am\,u}{1 - k^2\sin^2 am\,a\,\sin^2 am\,u},$$

und dieses ist gleich

$$\frac{d\,\Pi(u,a)}{du} = -\tfrac{1}{2}\frac{d\log(1 - k^2\sin am^2\,a\,\sin^2 am\,u)}{da},$$

folglich ist auch

$$\int_0^a \frac{d\,\Pi(u,a)}{du}\,da = -\tfrac{1}{2}\log(1 - k^2\sin^2 am\,a\,\sin^2 am\,u).$$

Demnach erhält man:

$$-\tfrac{1}{2}\log(1 - k^2\sin^2 am\,a\,\sin^2 am\,u)$$

$$= \log\frac{\Theta(a)}{\Theta(0)} - \tfrac{1}{2}\log\Theta(u-a)\,\Theta(u+a) + \log\Theta(u),$$

und wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht:

$$\left(\frac{\Theta(u)\,\Theta(a)}{\Theta(0)}\right)^2 = \frac{\Theta(u+a)\,\Theta(u-a)}{1 - k^2\sin^2 am\,u\,\sin^2 am\,a}.$$

Mit Hülfe dieser Relation kann der in (15) unter dem Logarithmus enthaltene Ausdruck auf zweierlei Weise durch elliptische Functionen ausgedrückt werden, von denen die eine hier näher ausgeführt werden soll*). Schreibt man statt der vorigen Gleichung

$$\left(\frac{\Theta(x)\,\Theta(y)}{\Theta(0)}\right)^2 = \frac{\Theta(x+y)\,\Theta(x-y)}{1 - k^2\sin^2 am\,x\,\sin^2 am\,y},$$

*) *Jacobi*, Fundamenta nova. § 54.

Digitized by Google

und setzt darin der Reihe nach

$$\begin{array}{ll} x = u - a, & \text{sodass } x + y = u + v - 2a, \\ y = v - a, & x - y = u - v, \\ x = u + a, & x + y = u + v + 2a, \\ y = v + a, & x - y = u - v, \\ x = u + v - a, & x + y = u + v, \\ y = a, & x - y = u + v - 2a, \\ x = u + v + a, & x + y = u + v + 2a, \\ y = a, & x - y = u + v, \end{array}$$

so erhält man

$$\left(\frac{\Theta(u-a)\,\Theta(v-a)}{\Theta(0)}\right)^2 = \frac{\Theta(u-v)\,\Theta(u+v-2a)}{1-k^2\sin^2 am(u-a)\,\sin^2 am(v-a)},$$

$$\left(\frac{\Theta(u+a)\,\Theta(v+a)}{\Theta(0)}\right)^2 = \frac{\Theta(u-v)\,\Theta(u+v+2a)}{1-k^2\sin^2 am(u+a)\,\sin^2 am(v+a)},$$

$$\left(\frac{\Theta(a)\,\Theta(u+v-a)}{\Theta(0)}\right)^2 = \frac{\Theta(u+v)\,\Theta(u+v-2a)}{1-k^2\sin^2 am\,a\,\sin^2 am(u+v-a)},$$

$$\left(\frac{\Theta(a)\,\Theta(u+v+a)}{\Theta(0)}\right)^2 = \frac{\Theta(u+v)\,\Theta(u+v+2a)}{1-k^2\sin^2 am\,a\,\sin^2 am(u+v+a)},$$

und wenn man das Product aus der ersten und vierten Gleichung durch das der zweiten und dritten dividirt und die Wurzel nimmt:

$$\frac{\Theta(u-a)\,\Theta(v-a)\,\Theta(u+v+a)}{\Theta(u+a)\,\Theta(v+a)\,\Theta(u+v-a)}$$

$$= \sqrt{\frac{1-k^2\sin^2 am(u+a)\sin^2 am(v+a)}{1-k^2\sin^2 am(u-a)\sin^2 am(v-a)}\cdot\frac{1-k^2\sin^2 am\,a\sin^2 am(u+v-a)}{1-k^2\sin^2 am\,a\sin^2 am(u+v+a)}}.$$

Durch eine ziemlich complicirte Rechnung, welche sich in § 54 der Fundamenta vollständig ausgeführt findet, kann man diesen Ausdruck auch in den im § 35 gefundenen:

$$(16) \quad \frac{1-k^2\sin am\,a\sin am\,u\sin am\,v\sin am(u+v-a)}{1+k^2\sin am\,a\sin am\,u\sin am\,v\sin am(u+v+a)}$$

verwandeln.

Aus dem Additionstheoreme für die Argumente (15) ergiebt sich das für die Parameter mit Hülfe des Satzes von der Vertauschung des Arguments mit dem Parameter (§ 67).

Wir fanden dort (2)

$$(17) \quad \Pi(u, a) = uZ(a) - aZ(u) + \Pi(a, u).$$

Digitized by Google

Demnach ist auch

$$\Pi(u, b) = uZ(b) - bZ(u) + \Pi(b, u).$$

Hieraus folgt durch Addition:

$$\Pi(u, a) + \Pi(u, b) = u[Z(a) + Z(b)] - (a + b)Z(u) + \Pi(a, u) + \Pi(b, u).$$

Darin kann man nun die beiden letzten Glieder nach (15) vereinigen; wendet man auch zugleich das Additionstheorem der zweiten Gattung an [(6) § 67], wonach

$$Z(a) + Z(b) = Z(a + b) + k^2 \sin am\, a \sin am\, b \sin am\,(a+b)$$

ist, so erhält man

$$\Pi(u,a)+\Pi(u,b) = uZ(a+b)+uk^2 \sin am\, a \sin am\, b \sin am(a+b) - (a+b)Z(u)+\Pi(a+b,u)+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(a-u)\Theta(b-u)\Theta(a+b+u)}{\Theta(a+u)\Theta(b+u)\Theta(a+b-u)}.$$

Allein wegen (17) ist auch.

$$uZ(a + b) - (a + b)Z(u) + \Pi(a + b, u) = \Pi(u, a + b).$$

Demnach wird

$$\Pi(u,a)+\Pi(u,b) = \Pi(u,a+b)+uk^2 \sin am\, a \sin am\, b \sin am\,(a+b) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(a-u)\,\Theta(b-u)\,\Theta(a+b+u)}{\Theta(a+u)\,\Theta(b+u)\,\Theta(a+b-u)}$$

oder, wenn man in dem Ausdrucke (16) a mit u und b mit v vertauscht,

$$\Pi(u,a)+\Pi(u,b) = \Pi(u,a+b)+uk^2 \sin am\, a \sin am\, b \sin am\,(a+b) + \tfrac{1}{2}\log\frac{1 - k^2 \sin am\, u \sin am\, a \sin am\, b \sin am\,(a+b-u)}{1 + k^2 \sin am\, u \sin am\, a \sin am\, b \sin am\,(u+b+u)},$$

und hierin besteht das Theorem für die Addition der Parameter.

Digitized by Google

Anhang.

Neunzehnter Abschnitt.

Ueber die Bewegung des sphärischen Pendels.

§ 74.

Als ein grösseres Beispiel für die Anwendung der elliptischen Functionen, und namentlich ein solches, bei welchem auch die Transcendenten der zweiten und dritten Gattung eine Rolle spielen, soll im Folgenden die Bewegung des sphärischen Pendels, d. h. die Bewegung eines Punktes, der, allein von der Schwerkraft getrieben, auf der Oberfläche einer Kugel zu bleiben gezwungen ist, untersucht werden.

Es sei der Mittelpunkt der Kugel, oder der Aufhängepunkt des Pendels, der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen positive z-Axe mit der Richtung der Schwere zusammenfällt. Bezeichnet dann r den Radius der Kugel oder die Länge des Pendels, g die Acceleration der Schwere und N den Druck, den der materielle Punkt (dessen Masse der Einheit gleich angenommen werden möge) auf die Oberfläche der Kugel ausübt, so ist

$$(1) \quad \cdots \cdots \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

die Gleichung der Kugel, und ferner

$$(2) \quad \cdots \cdots \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = N\frac{x}{r}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = N\frac{y}{r}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = N\frac{z}{r} + g \end{cases}$$

die Differentialgleichungen der Bewegung (t bedeutet die Zeit).

Digitized by Google

Multiplicirt man die Differentialgleichungen resp. mit $2\frac{dx}{dt}$, $2\frac{dy}{dt}$, $2\frac{dz}{dt}$, so erhält man durch Addition:

$$2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}$$
$$=2\frac{N}{r}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)+2g\frac{dz}{dt},$$

und da vermöge der Gleichung (1)

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=0$$

ist, durch Integration

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=2gz+c, \quad \cdots \quad (3)$$

wo c eine willkürliche Constante bedeutet. Diese Gleichung enthält den Satz der lebendigen Kraft. Eine zweite Integralgleichung liefert der Flächensatz für die xy-Ebene. Multiplicirt man nämlich die erste der Gleichungen (2) mit y, die zweite mit x und subtrahirt, so kommt

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

und man erhält daher durch Integration, wenn c' eine zweite willkürliche Constante bedeutet,

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c'. \quad \cdots \quad (4)$$

Wir führen jetzt Polarcoordinaten ein, indem wir

$$x=r\sin\psi\cos\varphi, \quad y=r\sin\psi\sin\varphi, \quad z=r\cos\psi$$

setzen, sodass ψ die zwischen 0 und π genommene Neigung des Pendels gegen die positive z-Axe (die Verticale), und φ den Winkel bedeutet, den eine durch das Pendel und die z-Axe gelegte Ebene mit der xz-Ebene bildet. Man erhält hieraus durch Differentiation

$$\frac{dx}{dt}=r\cos\psi\cos\varphi\frac{d\psi}{dt}-r\sin\psi\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt}=r\cos\psi\sin\varphi\frac{d\psi}{dt}+r\sin\psi\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$
$$\frac{dz}{dt}=-r\sin\psi\frac{d\psi}{dt},$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen (3) und (4)

Digitized by Google

$$r^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\psi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2gr\cos\psi + c,$$

$$r^2\sin^2\psi\,\frac{d\varphi}{dt} = c'.$$

Dividirt man beiderseits mit r^2 und setzt zur Abkürzung

$$\frac{c'}{r^2} = C,\quad \frac{c}{r^2} = A,$$

so folgt

(5) $$\sin^2\psi\,\frac{d\varphi}{dt} = C,$$

und wenn man den daraus hervorgehenden Werth von $\frac{d\varphi}{dt}$ in die erstere Gleichung substituirt:

(6) $$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{\sin^2\psi} = \frac{2g}{r}\cos\psi + A.$$

Hieraus ergiebt sich alsdann

(7) $$dt = \frac{\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{\left(\frac{2g}{r}\cos\psi + A\right)\sin^2\psi - C^2}},$$

und wenn man diesen Werth in (5) substituirt:

(8) $$d\varphi = \frac{C\sin\psi\,d\psi}{\sin^2\psi\sqrt{\left(\frac{2g}{r}\cos\psi + A\right)\sin^2\psi - C^2}}.$$

Um die willkürlichen Constanten A und C durch Grössen auszudrücken, welche eine mechanische Bedeutung haben, nehmen wir an, das Pendel befinde sich zur Zeit $t = 0$ in der xz-Ebene, sodass für $t = 0$ auch $\varphi = 0$ sei, die zu derselben Zeit stattfindenden Werthe von ψ, $\frac{d\psi}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ aber seien resp. ψ_0, ψ'_0 und φ'_0; dann erhält man aus den Gleichungen (5) und (6)

(9) $$\begin{cases} C = \sin^2\psi_0\,\varphi'_0, \\ A = (\psi'_0)^2 + \sin^2\psi_0\,(\varphi'_0)^2 - \frac{2g}{r}\cos\psi_0. \end{cases}$$

Denkt man sich nun die am Anfange der Bewegung stattfindende ganze Geschwindigkeit v in zwei rechtwinklige Componenten u und w zerlegt, die eine, u, in der xz-Ebene und senkrecht zum Radius, die andere, w, parallel der horizontalen xy-Ebene und ebenfalls senkrecht zum Radius, so ist

$$u = r\psi'_0,\quad w = r\sin\psi_0\,\varphi'_0,$$

Digitized by Google

und durch diese Geschwindigkeiten ausgedrückt, wird

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{\sin\psi_0}{r}\,w, \\ A &= \frac{u^2+w^2}{r^2} - \frac{2g}{r}\cos\psi_0 = \frac{v^2}{r^2} - \frac{2g}{r}\cos\psi_0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Den Winkel ψ_0 lassen wir vor der Hand noch unbestimmt, um späterhin die zweckmässigste Annahme für ihn treffen zu können.

Integrirt man nun die Gleichungen (7) und (8) von $t = 0$ an, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} t &= \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{\left(\frac{2g}{r}\cos\psi + A\right)\sin^2\psi - C^2}}, \\ \varphi &= C\int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sin\psi\,d\psi}{\sin^2\psi\sqrt{\left(\frac{2g}{r}\cos\psi + A\right)\sin^2\psi - C^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

§ 75.

Um die vorstehenden Integrale, welche elliptische Integrale sind, da die Variable $\cos\psi$ unter dem Wurzelzeichen in der dritten Potenz vorkommt, auf die Normalform zu bringen, müssen wir nach den Lehren des III^ten^ Abschnitts zuvörderst untersuchen, ob die cubische Gleichung, welche entsteht, wenn man den unter dem Wurzelzeichen stehenden Ausdruck gleich Null setzt, eine oder drei reelle Wurzeln besitzt. Dabei bemerke man aber, dass wegen der aus (7) folgenden Gleichung

$$\sin\psi\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\left(\frac{2g}{r}\cos\psi + A\right)\sin^2\psi - C^2}$$

diejenigen Werthe von ψ, für welche die Wurzelgrösse verschwindet, zugleich Maxima oder Minima von ψ sind, weil für sie auch der Differentialquotient $\frac{d\psi}{dt}$ zu Null wird.

Die Grösse unter dem Wurzelzeichen giebt entwickelt

$$-\frac{2g}{r}\left\{\cos^3\psi + \frac{Ar}{2g}\cos^2\psi - \cos\psi - \frac{r}{2g}(A - C^2)\right\}.$$

Digitized by Google

Setzt man dann der Kürze wegen

(12) . . . $\cos\psi = x, \quad \frac{Ar}{2g} = a, \quad \frac{C^2 r}{2g} = b,$

(13) . . . $x^3 + ax^2 - x + (b - a) = y,$

so ist

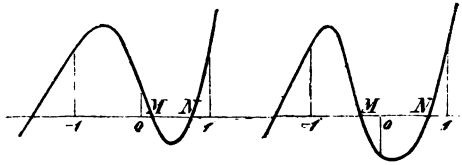
$$y = 0$$

die zu untersuchende cubische Gleichung, und

(14) . . . . . $\sin\psi \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{-\frac{2g}{r} y}.$

Stellt man sich die Gleichung (13) als die Gleichung einer Curve vor (Fig. 18), so kommt die Frage, ob die Gleichung $y = 0$ eine oder drei reelle Wurzeln hat, darauf zurück, zu untersuchen, ob die Curve die Axe der x ein oder drei Mal schneidet. Lässt man nun x von $-\infty$ an wachsen, so wächst auch y von $-\infty$ an und erreicht für $x = -1$ den Werth b, welcher, wie man aus (12) sieht, positiv ist. Daher verschwindet y nothwendig einmal für einen Werth von x, der zwischen $-\infty$ und -1 liegt. Dieser Wurzel der Gleichung $y = 0$ gehört jedoch kein Maximum oder Minimum des Winkels ψ an, weil hier der Werth von x oder $\cos\psi$ ein unechter Bruch ist, demselben also überhaupt ein reeller Werth von ψ nicht entspricht. Aus dieser Bemerkung ersieht man, dass der Beweis, den *Lagrange* im Art. 16 der 8ten Section im 2ten Theile der *Mécanique analytique* für die Realität der drei Wurzeln der Gleichung $y = 0$ giebt, nicht stichhaltig ist. Er sagt nämlich: die Natur des Problems lehrt, dass ein einzelnes Maximum oder Minimum des Winkels ψ nicht stattfinden kann, sondern dass auf jedes Maximum ein Minimum, und umgekehrt, folgen muss. Da nun die Gleichung $y = 0$ als cubische Gleichung jedenfalls eine reelle Wurzel hat, so muss sie auch eine zweite reelle Wurzel haben, und daher müssen alle drei Wurzeln reell sein. Er setzt bei diesem Beweise stillschweigend voraus, dass jeder reellen Wurzel auch ein reelles Maximum oder Minimum des Winkels ψ zugehöre. Wäre diese Voraussetzung richtig, so

Fig. 18.



Digitized by Google

würde gegen obigen Beweis nichts einzuwenden sein; allein, wie wir gesehen haben, ist sie nicht richtig; es könnten daher die beiden anderen Wurzeln immerhin noch imaginär sein, d. h. es könnten bei der Bewegung des sphärischen Pendels gar keine Maximal- oder Minimalwerthe des Winkels ψ vorkommen, wie dies z. B. bei dem ebenen Pendel der Fall ist, wenn dasselbe um die ganze Peripherie herumschwingt. (Vgl. § 5.)

Man kann aber auf andere Weise zeigen, dass dieser Fall in der That beim sphärischen Pendel nicht vorkommt, dass vielmehr die Gleichung $y = 0$ immer drei reelle Wurzeln hat, von denen die zweite einem Maximal- und die dritte einem Minimalwerthe des Winkels ψ entspricht.

Da nämlich y zuerst (von $x = -\infty$ anfangend) negativ ist, an der Stelle $x = -1$ aber positiv geworden ist, so ist klar, dass die Curve die Axe der x aufs neue schneiden wird, die Gleichung $y = 0$ also drei reelle Wurzeln haben muss, wenn y für Werthe von x, die grösser als -1 sind, wiederum aus dem Positiven in das Negative übergeht. Dass dies aber wirklich eintritt, zeigt die Gleichung (14)

$$\sin\psi\,\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{-\frac{2g}{r}\,y};$$

denn diese lehrt, dass ψ nur für solche zwischen -1 und $+1$ liegenden Werthe von x, für welche zugleich y negativ ist, reelle Werthe annimmt. Demnach hat die Gleichung $y = 0$ in der That drei reelle Wurzeln, und da für $x = +1$, y wieder positiv, nämlich gleich b wird, so entsprechen den beiden letzten auch reelle Werthe von ψ. Zugleich ist ersichtlich, dass nur der zwischen den beiden letzten Durchschnittspunkten M und N der Curve mit der Abscissenaxe (Fig. 18) liegende Theil der letzteren diejenigen Werthe von x enthält, deren entsprechende Werthe von ψ während der Bewegung wirklich eintreten. Hieraus folgt denn ohne Weiteres, dass dem Punkte M der kleinste Werth von x, also der grösste von ψ, und dem Punkte N der grösste Werth von x oder der kleinste Werth von ψ angehört.

So sehen wir denn, dass der Winkel ψ während der Bewegung des sphärischen Pendels einen grössten und einen kleinsten Werth erreicht, jener möge mit α, dieser mit β be-

Digitized by Google

zeichnet werden. Jener entspricht dem höchsten, dieser dem tiefsten Punkte, den das Pendel während der Bewegung erreicht. Um zu erfahren, ob diese Punkte auf der unteren oder oberen Halbkugel liegen, müssen wir unterscheiden, ob die Grösse $b - a$ positiv oder negativ ist. Die folgenden zusammengehörigen Werthe von x und y:

$$\begin{aligned} x &= -\infty, & y &= -\infty, \\ x &= -1, & y &= b, \\ x &= 0, & y &= b - a, \\ x &= \cos\psi_0, & y &= -\frac{r}{2g}\sin^2\psi_0\,(\psi'_0)^2, \\ x &= +1, & y &= b, \end{aligned}$$

zeigen, dass, wenn $b - a$ positiv ist, die beiden letzten Wurzeln der Gleichung $y = 0$ zwischen 0 und $+1$ liegen, wenn dagegen $b - a$ negativ ist, die eine zwischen 0 und -1, die andere zwischen 0 und $+1$ enthalten ist. Demnach liegt β (der kleinste Werth von ψ) in jedem Falle zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, dagegen α (der grösste Werth von ψ) liegt zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ oder zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π, jenachdem $b - a$ positiv oder negativ ist. Nun erhält man aber aus den Ausdrücken (12) und (10)

$$b = \frac{\sin^2\psi_0\, w^2}{2gr},$$

$$a = \frac{u^2 + w^2}{2gr} - \cos\psi_0,$$

$$b - a = \cos\psi_0 - \frac{u^2 + w^2\cos^2\psi_0}{2gr}.$$

Daher hat das sphärische Pendel seinen tiefsten Punkt stets auf der unteren Halbkugel, und es bleibt auch fortwährend in derselben, wenn

$$\frac{u^2 + w^2\cos^2\psi_0}{r} < 2g\cos\psi_0;$$

ist dagegen

$$\frac{u^2 + w^2\cos^2\psi_0}{r} > 2g\cos\psi_0,$$

so hat es seinen höchsten Punkt in der oberen Halbkugel. Nimmt man nun für den Augenblick an, dass das Pendel seine Bewegung aus dem tiefsten Punkte beginne, dass also $\psi_0 = \beta$ sei, so verschwindet, weil $\cos\beta$ eine Wurzel der

Digitized by Google

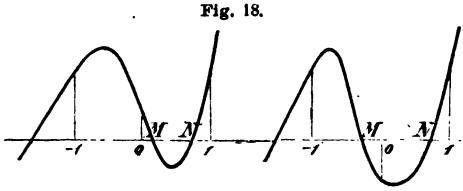
Gleichung $y = 0$ ist, wegen (14) der Differentialquotient $\frac{d\psi}{dt}$ *), demnach ist auch die Componente u gleich Null, und die obigen Ungleichungen verwandeln sich in

$$\frac{w^2}{r} \cos\beta \lessgtr 2g.$$

Nun repräsentirt w in diesem Falle die ganze Geschwindigkeit, $\frac{w^2}{r}$ also die Centrifugalkraft, und $\frac{w^2}{r} \cos\beta$ die verticale Componente derselben; man kann daher den Satz aussprechen: Das sphärische Pendel gelangt während der Bewegung in die obere Halbkugel, oder bleibt fortwährend in der unteren, je nachdem im Augenblicke des Durchganges durch den tiefsten Punkt die verticale Componente der Centrifugalkraft grösser oder kleiner als die doppelte Schwere ist.

Die beiden Wurzeln $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ der Gleichung $y = 0$ können auch einander gleich werden, dann fallen die beiden Punkte M und N (Fig. 18) zusammen, und die Curve berührt nur die Abscissenaxe. Der Spielraum für die bei der Bewegung eintretenden Werthe von ψ reducirt sich dann auf einen einzigen Werth $\psi = \psi_0 = \beta = \alpha$; d. h. der Winkel ψ ist während der ganzen Bewegung constant, das Pendel beschreibt also auf der Kugel einen kleinen Kreis.

Fig. 18.



In der That wird jetzt y für reelle Werthe von ψ nicht mehr negativ, sondern erreicht nur den Werth Null, daher muss während der ganzen Bewegung wegen (14) $\frac{d\psi}{dt}$ = Null sein. Hieraus folgt zunächst, dass $u = 0$ ist. Weil aber die Gleichung $y = 0$ zwei gleiche Wurzeln hat, so muss auch $\frac{dy}{dx}$ verschwinden, man hat also

$$\frac{dy}{dx} = 3\cos^2\psi + 2a\cos\psi - 1 = 0;$$

*) $\sin\psi$ kann nicht Null sein, da $\cos\psi$ die Werthe $+1$ oder -1 niemals erreicht, das sphärische Pendel geht daher niemals durch die Verticale.

Digitized by Google

und substituirt man darin den für $u = 0$ sich ergebenden Werth

$$a = \frac{w^2}{2gr} - \cos\psi,$$

so erhält man

$$w^2 = \frac{rg\sin^2\psi}{\cos\psi}.$$

Die Bedingungen für das Entstehen der kreisförmigen Bewegung sind daher

$$u = 0 \qquad w^2 = \frac{rg\sin^2\psi}{\cos\psi},$$

woraus zugleich hervorgeht, dass eine solche Bewegung nur in der unteren Halbkugel stattfinden kann.

Schreibt man die letztere Gleichung in folgender Form:

$$\frac{w^2}{r\sin\psi}\cos\psi = g\sin\psi,$$

und bedenkt, dass $r\sin\psi$ der Halbmesser des kleinen, vom Pendel beschriebenen Kugelkreises,

$$\frac{w^2}{r\sin\psi}$$

also die Centrifugalkraft in Bezug auf die Verticale als Rotationsaxe genommen,

$$\frac{w^2}{r\sin\psi}\cos\psi \quad \text{und} \quad g\sin\psi$$

aber die auf dem Kugelradius senkrecht stehendenden Componenten jener Centrifugalkraft und der Schwere sind, so kann man folgenden Satz ablesen: Das sphärische Pendel bewegt sich kreisförmig, wenn erstens die anfängliche Geschwindigkeit horizontal gerichtet, und zweitens die auf dem Kugelradius (dem Pendelfaden) senkrecht stehende Componente der auf die Verticale als Rotationsaxe bezogenen Centrifugalkraft gleich der nach derselben Richtung genommenen Componente der Schwere ist.

§ 76.

Es sollen nun die Winkel α und β statt A und C als willkürliche Constanten eingeführt werden*). Dies geschieht

*) *Lagrange*, Mécanique analytique. II. Sect. VIII. § 1.

Digitized by Google

leicht mit Hülfe der cubischen Gleichung $y = 0$, von welcher $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ zwei Wurzeln sind. Denn da der Coefficient von x in derselben $= -1$ ist, so muss, wenn die dritte Wurzel für den Augenblick mit ξ bezeichnet wird,

$$\cos\alpha\cos\beta + \xi\cos\alpha + \xi\cos\beta = -1,$$

also

$$\xi = -\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$$

sein. Demnach ist

$$y = (\cos\psi - \cos\beta)(\cos\psi - \cos\alpha)\left(\cos\psi + \frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\right).$$

Alsdann folgt, weil a die Summe und $b - a$ das Product der drei Wurzeln, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, ist,

$$a = -\left[\cos\alpha + \cos\beta - \frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\right] = \frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta},$$

$$b - a = \frac{\cos\alpha\cos\beta(1+\cos\alpha\cos\beta)}{\cos\alpha+\cos\beta},$$

mithin

$$b = \frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}.$$

Demnach ist auch

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{2g}{r}\cdot\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} \\ C &= \sqrt{\frac{2g}{r}}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha+\cos\beta}}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

und die Gleichungen (11) verwandeln sich in folgende:

$$t = \sqrt{\frac{r}{2g}}\int_{\psi_0}^{\psi}\frac{\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{-(\cos\psi-\cos\beta)(\cos\psi-\cos\alpha)\left(\cos\psi+\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\right)}},$$

$$\varphi = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha+\cos\beta}}\times$$

$$\int_{\psi_0}^{\psi}\frac{\sin\psi\,d\psi}{\sin^2\psi\sqrt{-(\cos\psi-\cos\beta)(\cos\psi-\cos\alpha)\left(\cos\psi+\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\right)}}.$$

Zur Reduction dieser Integrale auf die Normalform be-

Digitized by Google

dienen wir uns der im § 22 erläuterten Substitutionen der zweiten Ordnung. Setzt man der Kürze wegen

$$\cos\psi = x,\ \cos\beta = x_1,\ \cos\alpha = x_2,\ -\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = x_3,$$

sodass

$$x_1 > x_2 > x_3 > -\infty,$$

so ist das zu transformirende Integral das folgende:

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{-(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}},$$

und die Integrationsgrenzen liegen zwischen den beiden auf einander folgenden Wurzeln x_1 und x_2. Nun giebt es, wie § 22 gezeigt worden ist, immer zwei Substitutionen, die sich dadurch unterscheiden, dass, wenn die Variablen der entstehenden Normalformen mit σ und ω bezeichnet werden, x und $\sin^2\omega$ gleichzeitig abnehmen, x und $\sin^2\sigma$ aber nicht. Man hat daher folgende entsprechende Werthe der Variablen:

$$(16)\quad \begin{cases} \text{abnehmende Werthe von } x: & x_1,\ x_2,\ x_3, & \mp\infty, \\ \text{zunehmende} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \sin^2\sigma: & 0,\ 1,\ \frac{1}{k^2} & \pm\infty, \\ \text{abnehmende} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \sin^2\omega: & 1,\ 0,\ \mp\infty, & \frac{1}{k^2}. \end{cases}$$

Bedient man sich nun der Formeln (41), (44) und (45) des § 22, so hat man zu setzen:

bei der ersten Substitution $p = x_1,\ q = x_2,\ r = x_3,\ s = \infty$,

„ „ zweiten „ $p = x_2,\ q = x_1,\ r = \infty,\ s = x_3$.

Demnach erhält man für beide Substitutionen

$$k^2 = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3},$$

und dann bei der ersten Substitution

$$\sin^2\sigma = \frac{x-x_1}{x_2-x_1},\ \cos^2\sigma = \frac{x-x_2}{x_1-x_2},\ \Delta^2\sigma = \frac{x-x_3}{x_1-x_3},$$

$$-\frac{dx}{\sqrt{-(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}} = +\frac{2}{\sqrt{x_1-x_3}}\cdot\frac{d\sigma}{\Delta\sigma},$$

und bei der zweiten Substitution

$$\sin^2\omega = \frac{x_1-x_3}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_2}{x-x_3} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{x-x_2}{x-x_3},$$

$$-\frac{dx}{\sqrt{-(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}} = -\frac{2}{\sqrt{x_1-x_3}}\cdot\frac{d\omega}{\Delta\omega}.$$

Uebrigens ist sogleich ersichtlich, dass man auch hat

Digitized by Google

$$\sin\omega = \frac{\cos\sigma}{\Delta\sigma}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Durch α und β ausgedrückt, geben nun diese Formeln

$$k^2 = \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta}, \quad k'^2 = \frac{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta}, \quad (18)$$

und dann bei der ersten Substitution:

$$\left.\begin{aligned} &\cos\psi = \cos\beta - (\cos\beta - \cos\alpha)\sin^2\sigma, \quad \sin^2\sigma = \frac{\cos\beta - \cos\psi}{\cos\beta - \cos\alpha} \\ &t = 2\sqrt{\frac{r}{2g}}\sqrt{\frac{\cos\beta + \cos\alpha}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta}}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}, \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

und bei der zweiten Substitution

$$\left.\begin{aligned} &\sin^2\omega = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{\cos\psi - \cos\alpha}{\cos\psi + \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}}, \\ &t = -2\sqrt{\frac{r}{2g}}\sqrt{\frac{\cos\beta + \cos\alpha}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta}}\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\Delta\omega}, \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

wobei σ_0 und ω_0 die den Werthen $t = 0$ und $\psi = \psi_0$ entsprechenden Werthe von σ und ω bezeichnen.

Der Winkel φ wird durch ein Integral von der Form

$$\int\frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{-(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}}$$

bestimmt. Dasselbe zerlegt sich in die beiden elliptischen Integrale dritter Gattung

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{(1 + x)\sqrt{-(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}}$$
$$+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{(1 - x)\sqrt{-(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}}.$$

Da diese nach der Transformation die Form

$$\int\frac{f(\sigma)\,d\sigma}{(1 + n\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma}$$

annehmen, so hat man für $-\frac{1}{n}$ diejenigen Werthe von $\sin^2\sigma$ zu setzen, welche resp. den Werthen -1 und $+1$ von x entsprechen. Bezeichnen wir nun die Legendre'schen Parameter bei der ersten Substitution mit n_1 und n_2 und bei der zweiten Substitution mit m_1 und m_2, so erhalten wir:

Digitized by Google

erste Substitution

$$\text{für } x = -1 \text{ wird } \sin^2\sigma = -\frac{1}{n_1} = \frac{x_1+1}{x_1-x_2},$$

$$\text{„ } x = +1 \text{ „ } \sin^2\sigma = -\frac{1}{n_2} = \frac{x_1-1}{x_1-x_2};$$

zweite Substitution

$$\text{für } x = -1 \text{ wird } \sin^2\omega = -\frac{1}{m_1} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1+x_2}{1+x_3},$$

$$\text{„ } x = +1 \text{ „ } \sin^2\omega = -\frac{1}{m_2} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1-x_2}{1-x_3}.$$

Erinnert man sich nun, dass x_1 und x_2 zwischen $+1$ und -1 lagen, x_3 aber < -1 war, so kann man das Schema (16) in folgender Weise erweitern:

abnehmende Werthe von x: $\quad +1, x_1, x_2, -1, x_3, \mp\infty,$

zunehmende Werthe von $\sin^2\sigma$: $\quad -\frac{1}{n_2}, 0, +1, -\frac{1}{n_1}, \frac{1}{k^2}, \pm\infty,$

abnehmende Werthe von $\sin^2\omega$: $\quad -\frac{1}{m_2}, 1, 0, -\frac{1}{m_1}, \mp\infty, \frac{1}{k^2},$

und sieht dann sofort, dass

n_1	zwischen	-1	und	$-k^2$
n_2	„	0	„	$+\infty$
m_1	„	0	„	$+\infty$
m_2	„	-1	„	$-k^2$

liegt. Hienach gehören bei beiden Substitutionen die elliptischen Integrale dritter Gattung derjenigen Klasse an, welche Legendre *intégrales à paramètre circulaire* genannt hat. (Siehe § 72.)

Die wirkliche Transformation der in Rede stehenden Integrale ist nun leicht; nach einigen Reductionen erhält man:

erste Substitution

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}}\left\{\frac{1}{1+\cos\beta}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{d\sigma}{(1+n_1\sin^2\sigma)\Delta\sigma}\right.\\ &\qquad\left. +\frac{1}{1-\cos\beta}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{d\sigma}{(1+n_1\sin^2\sigma)\Delta\sigma}\right\}\\ n_1 &= -\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{1+\cos\beta},\quad n_2 = +\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{1-\cos\beta}; \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

zweite Substitution

$$\left.\begin{aligned}\varphi = &- \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}}\left\{\frac{1}{1+\cos\alpha}\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{\Delta^2\omega\, d\omega}{(1+m_1\sin^2\omega)\,\Delta\omega}\right.\\ &\left.+\frac{1}{1-\cos\alpha}\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{\Delta^2\omega\, d\omega}{(1+m_2\sin^2\omega)\,\Delta\omega}\right\}\\ m_1 = &\; k^2\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(\cos\alpha+\cos\beta)},\\ m_2 = &- k^2\frac{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}{(1-\cos\alpha)(\cos\alpha+\cos\beta)}.\end{aligned}\right\}(22)$$

§ 77.

Wir werden uns nun in der Folge bei dem Winkel ψ ausschliesslich der ersten Substitution, als der einfacheren, bedienen; bei dem Winkel φ jedoch wird sich zeigen, dass die erste Substitution in vielen Fällen unbrauchbar wird, und daher die zweite angewendet werden muss.

Ueber den bis dahin noch willkürlich gelassenen Winkel ψ_0, welches der Werth des Winkels ψ zur Zeit $t = 0$ war, wollen wir nun so verfügen, dass die unteren Grenzen der auf die Normalformen reducirten Integrale, σ_0 und ω_0, verschwinden. Alsdann zeigen die Formeln (19) und (20) des vorigen Paragraphen, dass man bei der ersten Substitution $\psi_0 = \beta$ und bei der zweiten Substitution $\psi_0 = \alpha$ anzunehmen hat, d. h. also, dass man bei der ersten Substitution annimmt, das Pendel beginne seine Schwingungen aus dem tiefsten Punkte, bei der zweiten dagegen aus dem höchsten Punkte.

Setzt man nun

$$\int_0^{\sigma}\frac{d\sigma}{\Delta\sigma} = u,$$

sodass

$$\sigma = am\, u$$

ist, so wird nach (19) unter der Voraussetzung $\sigma_0 = 0$:

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{2g}}\sqrt{\frac{\cos\beta+\cos\alpha}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}}\,u,$$

Digitized by Google

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(23)\quad 2\sqrt{\frac{r}{2g}}\sqrt{\frac{\cos\beta+\cos\alpha}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}} = k\sqrt{\frac{2r}{g(\cos\beta-\cos\alpha)}} = M$$

setzt,

$$t = Mu.$$

Bezeichnet man ferner mit T die halbe Schwingungsdauer, d. h. die Zeit, in welcher das Pendel vom tiefsten Punkte zum höchsten gelangt, so erhält man, weil nach (19) für $\psi = \beta$, $\sigma = 0$, und für $\psi = \alpha$, $\sigma = \frac{\pi}{2}$ ist,

$$T = MK.$$

Demnach kann man auch setzen

$$M = \frac{T}{K}, \quad u = \frac{t}{M} = \frac{Kt}{T},$$

und erhält

$$\sigma = am\,\frac{Kt}{T}.$$

Dies nun in (19) substituirt, liefert den Winkel ψ als Function der Zeit ausgedrückt:

$$(24)\quad \begin{cases} \cos\psi = \cos\beta - (\cos\beta - \cos\alpha)\sin^2 am\,\frac{Kt}{T} \\ \qquad = \cos\beta\cos^2 am\,\frac{Kt}{T} + \cos\alpha\sin^2 am\,\frac{Kt}{T}, \end{cases}$$

worin nach (23) der Coefficient $\frac{K}{T}$ auch den Werth

$$\frac{K}{T} = \sqrt{\frac{g(\cos\beta-\cos\alpha)}{2rk^2}}$$

hat. In der vorigen Formel wächst das Argument der Amplitude um K, wenn t um T wächst, daher ist

$$\sin^2 am\,\frac{K(t+2T)}{T} = \sin^2 am\,\frac{Kt}{T}$$

und

$$\sin^2 am\,\frac{K(T-t)}{T} = \sin^2 am\,\frac{K(T+t)}{T}.$$

Hieraus geht hervor, dass die Bewegung in der Art vor sich geht, dass der Winkel ψ genau in der umgekehrten Reihenfolge der Werthe von α bis β abnimmt, wie er von β bis α gewachsen ist, und dass nach Verlauf der Zeit $2T$ immer genau dieselben Werthe von ψ periodisch wieder eintreten. In den Momenten, wo t die Werthe $\frac{1}{2}T$, $\frac{3}{2}T$, $\frac{5}{2}T$, ... hat, hat ψ immer den gleichen Werth; nämlich, da

Digitized by Google

$$\sin^2 am\, \tfrac{1}{2} K = \sin^2 am\, \tfrac{3}{2} K = \sin^2 am\, \tfrac{5}{2} K = \cdots = \frac{1}{1+k'},$$

ist (§ 10. S. 28), so ist dann

$$\cos\psi = \frac{\cos\alpha + k' \cos\beta}{1 + k'}.$$

Man kann die Formel (24) auf eine einfachere Gestalt bringen, wenn man statt des Winkels ψ einen anderen Winkel ψ_1 einführt, der aus dem ersteren sich durch die Gleichung

$$\frac{\cos\psi}{\cos\beta} = \cos\psi_1$$

ergiebt. Denn setzt man ausserdem auch noch

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \cos\alpha_1 \text{*}), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

so erhält man

$$\cos\psi_1 = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha_1 \sin^2 am\, \frac{Kt}{T},$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi_1 = \sin\tfrac{1}{2}\alpha_1 \sin am\, \frac{Kt}{T}. \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

Ferner erhält man aus (18)

$$k^2 = \frac{1-\cos^2\alpha_1}{1 + 2\cos\alpha_1 + \frac{1}{\cos^2\beta}} = \frac{4\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha_1 \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha_1}{4\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha_1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha_1}{1 + \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{4\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha_1}};$$

setzt man nun noch

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1} = \operatorname{tg}\beta_1,$$

so wird

$$k = \sin\tfrac{1}{2}\alpha_1 \cos\beta_1.$$

Der Ausdruck (26) eignet sich gut zur Entwickelung in eine Reihe. Wendet man die erste der Formeln (21) § 68 an, so erhält man

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi_1 = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{H\left(\frac{Kt}{T}\right)}{\Theta\left(\frac{Kt}{T}\right)}$$

---

*) Dass $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ stets ein echter Bruch ist, erhellt daraus, dass $\cos\beta - \cos\alpha$ und $\cos\beta + \cos\alpha$ immer positive Grössen sind; das erste, weil $\alpha > \beta$, das zweite, weil nach (15) für ein verschwindendes $\cos\alpha + \cos\beta$ die Constante C, und daher auch die Geschwindigkeits-Componente w unendlich gross sein müsste. Demnach liegt β entweder zwischen 0 und α oder zwischen 0 und $\pi - \alpha$, je nachdem $\alpha \lessgtr \frac{\pi}{2}$ ist.

Digitized by Google

oder

$$(27)\begin{cases}\sin\frac{1}{2}\psi_1 = 2\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_1}{\cos\beta_1}} \\ \times\dfrac{\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi t}{2T} - \sqrt[4]{q^9}\sin 3\frac{\pi t}{2T} + \sqrt[4]{q^{25}}\sin 5\frac{\pi t}{2T} - \cdots}{1 - 2q\cos\frac{\pi t}{T} + 2q^4\cos 2\frac{\pi t}{T} - 2q^9\cos 3\frac{\pi t}{T} + \cdots}.\end{cases}$$

Der Modul k ist in den meisten Fällen kleiner als der Mittelwerth $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Zuerst ist leicht einzusehen, dass dies immer der Fall ist, so lange das Pendel nicht in die obere Halbkugel gelangt. Denn da wegen der Formel (25) die Winkel α und α_1 gleichzeitig den Werth 90^0 erreichen und überschreiten, so folgt aus der Formel für k, dass dasselbe selbst für $\alpha = 90^0$ noch kleiner $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist. Stellt man ferner die Ungleichung

$$\tfrac{1}{2} \lessgtr k^2,$$

d. h. nach (18)

$$\tfrac{1}{2} \lessgtr \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta}$$

auf, aus welcher

$$\sin^2\beta + 2\cos\alpha(\cos\alpha + \cos\beta) \lessgtr 0$$

folgt, so erhält man durch Auflösung nach $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = -\tfrac{1}{2}\cos\beta\left(1 \pm \sqrt{1 - 2\operatorname{tg}^2\beta}\right);\quad k^2 = \tfrac{1}{2},$$

$$\cos\alpha \begin{cases} > -\tfrac{1}{2}\cos\beta\left(1 + \sqrt{1 - 2\operatorname{tg}^2\beta}\right) \\ < -\tfrac{1}{2}\cos\beta\left(1 - \sqrt{1 - 2\operatorname{tg}^2\beta}\right)\end{cases};\ k^2 > \tfrac{1}{2}.$$

Daraus geht hervor, dass der Mittelwerth $k^2 = \frac{1}{2}$ nur für solche Werthe von β erreicht werden kann, für welche $\operatorname{tg}\beta \lessgtr \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist (also für $\beta \lessgtr 35^0\,16'$). Für einen jeden solchen Werth von β giebt es dann zwei Werthe von α, für die $k^2 = \frac{1}{2}$ ist, und nur für die dazwischen liegenden Werthe von α wird $k^2 > \frac{1}{2}$. Die folgende kleine Tafel giebt für einige Werthe von β diese aus der vorigen Formel berechneten Werthe von α an.

β	α	
$35^0\ 16'$	$114^0\ 6'$	$114^0\ 6'$
$30\ 0$	$100\ 33$	$133\ 5$
$20\ 0$	$93\ 51$	$150\ 46$
$10\ 0$	$90\ 53$	$165\ 46$
$5\ 0$	$90\ 13$	$172\ 55$

Digitized by Google

Man sieht hieraus, dass in der That bei weitem in den meisten Fällen der Modul unter dem Mittelwerth sein wird. Erinnert man sich nun desjenigen, was in § 55 über die Kleinheit der Grösse q gesagt ist, so leuchtet ein, dass man immer nur wenige Glieder der in der Formel (27) enthaltenen Reihen zu berechnen haben wird, ja dass für die meisten zur wirklichen Berechnung kommenden Fälle die einfache Näherungsformel

$$\sin \tfrac{1}{2}\psi_1 = 2\sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}\alpha_1}{\cos \beta_1}} \cdot \frac{\sqrt[4]{q}\,\sin \frac{\pi t}{2T}}{1 - 2q \cos \frac{\pi t}{T}}$$

vollkommen ausreicht.

Bei der zweiten Substitution erhält man aus den Formeln (20) und (23)

$$t = -M \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\Delta\omega},$$

und wenn man $\psi_0 = \alpha$, also $\omega_0 = 0$ annimmt,

$$t = -M \int_{0}^{\omega} \frac{d\omega}{\Delta\omega}.$$

Setzt man dann

$$\int_{0}^{\omega} \frac{d\omega}{\Delta\omega} = u_1,$$

so wird

$$\omega = am\, u_1 \quad \text{und} \quad u_1 = -\frac{t}{M}.$$

Nun fanden wir oben (17) zwischen den Winkeln σ und ω die Relation

$$\sin \omega = \frac{\cos \sigma}{\Delta\sigma},$$

also ist auch

$$\sin am\, u_1 = \frac{\cos am\, u}{\Delta am\, u},$$

d. h. nach § 10 (17) S. 28

$$\sin am\, u_1 = \sin am\,(u + K).$$

§ 78.

Wir gehen jetzt zur Untersuchung des Winkels φ über, dessen Ausdrücke durch σ und ω in den Formeln (21) und (22) § 76 gegeben sind, in welchen nach den im vorigen §

Digitized by Google

gemachten Annahmen über den Anfangspunkt der Zählung der Zeit $\sigma_0 = 0$ und $\omega_0 = 0$ zu setzen ist. Es kommt nun vor Allem darauf an, die in jenen Ausdrücken enthaltenen Integrale

$$\int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{(1 + n \sin^2 \sigma)\, \Delta\sigma} \quad \text{und} \quad \int_0^{\omega} \frac{\Delta^2 \omega\, d\omega}{(1 + m \sin^2 \omega)\, \Delta\omega}$$

durch die Transcendente Π auszudrücken. Das erste derselben ist schon § 21 ermittelt worden, nämlich für

$$\int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{\Delta\sigma} = u \quad \text{und} \quad n = -k^2 \sin^2 am\, a$$

hatte sich ergeben (§ 21, S. 78)

$$(28) \quad \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{(1 + n \sin^2 \sigma)\, \Delta\sigma} = u + \frac{\operatorname{tg} am\, a}{\Delta\, am\, a}\, \Pi(u, a).$$

Setzt man bei dem zweiten Integrale

$$\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\Delta\omega} = u_1 \quad \text{und} \quad m = -k^2 \sin^2 am\, b,$$

so ist nach der Definition der Transcendente Π (§ 21)

$$\Pi(u_1, b) = \int_0^{\omega} \frac{k^2 \sin am\, b \cos am\, b\, \Delta\, am\, b \sin^2 \omega\, d\omega}{(1 + m \sin^2 \omega)\, \Delta\omega}.$$

Nun ist aber

$$\int_0^{\omega} \frac{\Delta^2 \omega\, d\omega}{(1 + m \sin^2 \omega)\, \Delta\omega} = \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{(1 + m \sin^2 \omega)\, \Delta\omega} - \int_0^{\omega} \frac{k^2 \sin^2 \omega\, d\omega}{(1 + m \sin^2 \omega)\, \Delta\omega},$$

folglich erhält man

$$\int_0^{\omega} \frac{\Delta^2 \omega\, d\omega}{(1 + m \sin^2 \omega)\, \Delta\omega} = u_1 + \frac{\operatorname{tg} am\, b}{\Delta\, am\, b}\, \Pi(u_1, b) - \frac{\Pi(u_1, b)}{\sin am\, b \cos am\, b\, \Delta\, am\, b}$$

$$(29) \quad \cdots = u_1 - \frac{\operatorname{cotg} am\, b}{\Delta\, am\, b}\, \Pi(u_1, b).$$

Es ist im § 76 gezeigt worden, dass die Legendre'schen Parameter n_1, n_2, m_1, m_2 entweder zwischen -1 und $-k^2$ oder zwischen 0 und $+\infty$ liegen, nämlich n_1 und m_2 zwischen -1 und $-k^2$, dagegen n_2 und m_1 zwischen 0 und $+\infty$.

Digitized by Google

Aus den Untersuchungen des § 69 geht daher hervor, dass man zu setzen habe:

$$n_1 = -k^2 \sin^2 am\,(ia_1 + K), \quad m_1 = -k^2 \sin^2 am\, ib_1,$$
$$n_2 = -k^2 \sin^2 am\, ia_2, \quad m_2 = -k^2 \sin^2 am\,(ib_2 + K).$$

Nun waren aber sowohl $-\frac{1}{n_1}$ und $-\frac{1}{m_1}$, als auch $-\frac{1}{n_2}$ und $-\frac{1}{m_2}$ gewisse Werthe von $\sin^2\sigma$ und $\sin^2\omega$, d. h. von $\sin^2 am\,u$ und $\sin^2 am\,u_1$, welche demselben Werthe von ψ zugehörten. Ausserdem fanden wir, dass

$$\sin^2 am\,u_1 = \sin^2 am\,(u + K) = \sin^2 am\,(u - K)$$

ist. Hieraus folgt, dass die Jacobi'schen Parameter $ia_1 + K$ und ib_1, und ebenso auch ia_2 und $ib_2 + K$, nur um die Grösse K von einander verschieden sein können, dass also

$$a_1 = b_1 \quad \text{und} \quad a_2 = b_2$$

sein muss. Dies bestätigt sich nun auch sofort, wenn man aus den Ausdrücken (21) und (22) für die Grössen n und m durch α und β die reellen Werthe der elliptischen Functionen der Parameter a_1, a_2, b_1, b_2 mit dem complementären Modul k' durch α und β ausgedrückt herstellt. Man findet dann, mit Benutzung der Formeln für die Argumente iu (S. 23) und $iu + K$ (S. 28), mag man von den Grössen n oder m ausgehen, dieselben Ausdrücke für b_1, b_2, wie für a_1, a_2, nämlich die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
\sin^2 am(a_1,k') &= \frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha} = \frac{4k^2\sin^2\frac{1}{2}\alpha\sin^2\frac{1}{2}\beta}{k'^2(\cos^2\beta-\cos^2\alpha)},\\
\cos^2 am(a_1,k') &= \frac{(1+\cos\alpha)(\cos\beta+\cos\alpha)}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha} = \frac{2k^2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{k'^2(\cos\beta-\cos\alpha)},\\
\Delta^2 am(a_1,k') &= \frac{(1+\cos\beta)(\cos\beta+\cos\alpha)}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta} = \frac{2k^2\cos^2\frac{1}{2}\beta}{\cos\beta-\cos\alpha},\\
\sin^2 am(a_2,k') &= \frac{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}{(1+\cos\beta)(1+\cos\alpha)} = \frac{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}{4k^2\cos^2\frac{1}{2}\alpha\cos^2\frac{1}{2}\beta},\\
\cos^2 am(a_2,k') &= \frac{(1-\cos\beta)(\cos\beta+\cos\alpha)}{(1+\cos\beta)(1+\cos\alpha)} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\beta(\cos\beta+\cos\alpha)}{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha},\\
\Delta^2 am(a_2,k') &= \frac{(1-\cos\alpha)(\cos\beta+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha(\cos\beta+\cos\alpha)}{2\cos^2\frac{1}{2}\beta}.
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Da nur die Quadrate dieser elliptischen Functionen gegeben sind, so können diese selbst als positiv angenommen

Digitized by Google

werden; dann liegen $am\,(a_1, k')$ und $am\,(a_2, k')$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, also a_1 und a_2 zwischen 0 und K'.

Setzt man ferner in der Gleichung (28) für a resp. $ia_1 + K$ und ia_2, und in (29) für b resp. ia_1 und $ia_2 + K$, so erhält man mit Berücksichtigung der Formeln (12) § 8 und (18) § 10

$$\int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{(1+n_1\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma} = u + i\,\frac{\Delta\,am\,(a_1, k')}{k'^2 \sin am\,(a_1, k')\cos am\,(a_1, k')}\,\Pi\,(u, ia_1+K),$$

$$\int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{(1+n_2\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma} = u + i\,\frac{\sin am\,(a_2, k')\cos am\,(a_2, k')}{\Delta\,am\,(a_2, k')}\,\Pi\,(u, ia_2),$$

$$\int_0^{\omega} \frac{\Delta^2\omega\,d\omega}{(1+m_1\sin^2\omega)\,\Delta\omega} = u_1 + i\,\frac{\cos am\,(a_1, k')}{\sin am\,(a_1, k')\,\Delta\,am\,(a_1, k')}\,\Pi\,(u_1, ia_1),$$

$$\int_0^{\omega} \frac{\Delta^2\omega\,d\omega}{(1+m_2\sin^2\omega)\,\Delta\omega} = u_1 + i\,\frac{\sin am\,(a_2, k')\,\Delta\,am\,(a_2, k')}{\cos am\,(a_2, k')}\,\Pi\,(u_1, ia_2+K).$$

Substituirt man nun diese Ausdrücke in die Formeln (21) und (22), nachdem man vorher die Coefficienten der Π mittelst (30) durch α und β ausgedrückt hat, so erhält man für den Winkel φ die folgenden Werthe:

erste Substitution

$$\varphi = \frac{2\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,u}{\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}} + i\Pi\,(u, ia_1+K) + i\Pi\,(u, ia_2);$$

zweite Substitution

$$\varphi = -\frac{2\,\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\,u_1}{\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}} - i\Pi\,(u_1, ia_1) - i\Pi\,(u_1, ia_2+K).$$

Diese Ausdrücke zeigen, warum die zweite Substitution der ersten vorzuziehen ist. Da nämlich β entweder zwischen 0 und α oder zwischen 0 und $\pi - \alpha$ liegt, je nachdem α kleiner oder grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist, so ist $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ stets ein unechter Bruch. Nähert sich β der Null, so wird das erste Glied sehr gross. Für $\beta = 0$ aber wird wegen der Formeln (30)

$$\sin am\,(a_1, k') = 0, \quad \sin am\,(a_2, k') = 1,$$
$$\cos am\,(a_1, k') = 1, \quad \cos am\,(a_2, k') = 0,$$

also

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = K';$$

Digitized by Google

es geht daher

$$\begin{array}{ll} \Pi(u, ia_1 + K) & \text{in } \Pi(u, K) \\ \Pi(u, ia_2) & \text{in } \Pi(u, iK') \end{array}$$

über, von welchen Grössen die erste Null, die zweite unendlich gross ist (S. 79). Demnach wird der erste Ausdruck von φ für $\beta = 0$ unbestimmt und erscheint bei kleinen Werthen von β als der Unterschied zweier sehr grosser Zahlen. Anders verhält sich der zweite Ausdruk für φ. Hier ist $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ stets ein echter Bruch, und da

$$\Pi(u, 0) = 0, \quad \Pi(u, K + iK') = 0$$

ist, so verschwinden für $\beta = 0$ alle drei Glieder.

Wir werden daher im Folgenden ausschliesslich den zweiten Ausdruck für φ anwenden. Im vorigen § ergab sich

$$u_1 = -\frac{t}{M};$$

da nun auch $u = \frac{t}{M}$ war, worin freilich die Zeit t einen anderen Anfangspunkt der Zählung hat, so wollen wir von jetzt ab unter u den Ausdruck

$$\frac{t}{M} \text{ oder } \frac{Kt}{T}$$

verstehen, und demgemäss $-u$ für u_1 schreiben. Dann erhalten wir mit Berücksichtigung der Beziehung

$$\Pi(-u, a) = -\Pi(u, a),$$

$$\varphi = \frac{2\sin\beta}{\sin\alpha\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}} \cdot \frac{Kt}{T} + i\Pi(u, ia_1) + i\Pi(u, ia_2 + K).$$

Darin kann man dem ersten Gliede noch verschiedene andere Formen geben, indem man die Gleichungen (18), (23)

$$M = \frac{T}{K} = 2\sqrt{\frac{r}{2g}}\sqrt{\frac{\cos\beta+\cos\alpha}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}} = k\sqrt{\frac{2r}{g(\cos\beta-\cos\alpha)}},$$

$$k = \sqrt{\frac{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}},$$

sowie die Beziehungen (9), (10), (15), in welchen $\psi_0 = \alpha$ zu setzen ist,

$$C = \sin^2\alpha\,\varphi'_0 = \sin\alpha\,\frac{w}{r} = \sqrt{\frac{2g}{r}} \cdot \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha+\cos\beta}}$$

benutzt. Schreibt man nämlich der Kürze wegen

Digitized by Google

$$(31) \quad \varphi = Pt + i\Pi(u, ia_1) + i\Pi(u, ia_2 + K),$$

so nimmt P die folgenden Formen an:

$$(32) \quad \begin{cases} P = \dfrac{2\sin\beta}{\sin\alpha\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta}} \cdot \dfrac{K}{T} \\ = \sqrt{\dfrac{2g}{r}} \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha\sqrt{\cos\beta + \cos\alpha}} \\ = \dfrac{2\sin\beta}{\sin\alpha\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}} \cdot \dfrac{kK}{T} = \dfrac{w}{r\sin\alpha} = \varphi'_0. \end{cases}$$

Wir wenden nun ferner auf die Gleichung (31) die Relation (1) des § 67

$$\Pi(u, a) = u\,Z(a) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)}$$

an, indem wir zugleich $u = \frac{Kt}{T}$ setzen; dann wird

$$\varphi = \left\{P + i\frac{K}{T}Z(ia_1) + i\frac{K}{T}Z(ia_2 + K)\right\}t + \tfrac{1}{2}i\log\frac{\Theta(u - ia_1)\,\Theta(u - ia_2 - K)}{\Theta(u + ia_1)\,\Theta(u + ia_2 + K)}.$$

Dieser Ausdruck besteht aus zwei Theilen: einem periodischen und einem, der mit der Zeit proportional wächst. Um die Bedeutung des letzteren einzusehen, bezeichnen wir mit Φ denjenigen Werth des Winkels φ, welcher der Zeit T entspricht, d. h. denjenigen Winkel, welchen eine durch das Pendel und die Verticale gelegte Ebene beschreibt, während das Pendel vom höchsten zum nächstfolgenden niedrigsten Punkte sich bewegt. Setzt man aber $t = T$, so wird $u = K$, und da nun

$$\Pi(K, a) = K\,Z(a)$$

ist (S. 274), so erhält man aus (31)

$$\Phi = PT + i\,K\,Z(ia_1) + i\,K\,Z(ia_2 + K),$$

und mit Hülfe dieses Ausdrucks geht der vorige Ausdruck für φ in den folgenden über:

$$(33) \quad \varphi = \frac{\Phi}{T}t + \tfrac{1}{2}i\log\frac{\Theta(u - ia_1)\,\Theta(u - ia_2 - K)}{\Theta(u + ia_1)\,\Theta(u + ia_2 + K)}.$$

Dieser Ausdruck ist in Verbindung mit dem, was im § 77 über die Beschaffenheit des Winkels ψ ermittelt worden ist, geeignet, eine Vorstellung von der Bewegung des sphärischen

Digitized by Google

Pendels zu gewähren. Nach § 65 hat die Function Θ die folgenden Eigenschaften

$$\Theta(-u) = \Theta(u),$$
$$\Theta(u + 2K) = \Theta(u - 2K) = \Theta(u),$$
$$\Theta(u + K) = \Theta(u - K).$$

Demnach verschwindet das periodische Glied des vorigen Ausdrucks für $u = 0, = K, = 2K, = 3K$, etc., und man erhält folgende entsprechende Werthe von t, ψ und φ:

$$t = 0, = T, = 2T, = 3T, = 4T, \ldots.$$
$$\psi = \alpha, = \beta, = \alpha, = \beta, = \alpha, \ldots.$$
$$\varphi = 0, = \Phi, = 2\Phi, = 3\Phi, = 4\Phi, \ldots.$$

Setzt man ferner $t + 2T$ für t, also $u + 2K$ für u, so bleibt das periodische Glied ungeändert, während das erste Glied um 2Φ wächst. Bezeichnet man daher mit $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ die zur Zeit t stattfindenden Werthe der Winkel φ und ψ, so ist

$$\varphi(t + 2T) = 2\Phi + \varphi(t),$$

während gleichzeitig nach § 77

$$\psi(t + 2T) = \psi(t)$$

ist. Daraus erhellt, dass die Bahn des sphärischen Pendels aus fortwährend sich wiederholenden congruenten Theilen besteht, welche den Zeitintervallen

$$0 \ldots 2T,\ 2T \ldots 4T,\ 4T \ldots 6T, \text{ etc.}$$

und den Winkelintervallen

$$0 \ldots 2\Phi,\ 2\Phi \ldots 4\Phi,\ 4\Phi \ldots 6\Phi, \text{ etc.}$$

entsprechen. Wenn daher Φ in einem rationalen Verhältnisse zu π steht, so wird das Pendel, nachdem es eine Anzahl jener congruenten Theile durchlaufen hat, wieder zu dem Punkt zurückgelangen, von welchem es ausgegangen ist; sind aber Φ und π incommensurabel, so erreicht das Pendel seinen Ausgangspunkt niemals wieder.

Setzt man ferner $2T - t$ statt t, oder $2K - u$ statt u, so nimmt das periodische Glied den entgegengesetzten Werth an. Demnach ist

Digitized by Google

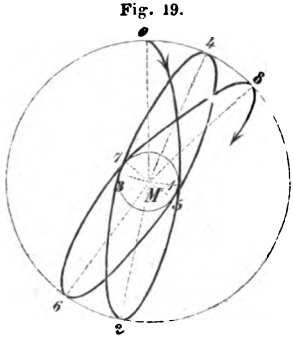
$$\varphi(2T - t) = 2\Phi - \varphi(t);$$

da nun gleichzeitig

$$\psi(2T - t) = \psi(t),$$

so besteht jeder der vorhin erwähnten congruenten Theile wiederum aus zwei congruenten Stücken, die jedoch eine entgegengesetzte Lage zu einander haben.

Fig. 19.



In Fig. 19 ist die Projection eines Theiles der Bahn des sphärischen Pendels auf eine Horizontalebene dargestellt. Die Punkte 0, 1, 2, 3, 4, etc. entsprechen den Zeiten

$$0,\ T,\ 2T,\ 3T,\ 4T \ldots,$$

den Winkeln

$$\psi = \alpha,\ = \beta,\ = \alpha,\ = \beta,\ = \alpha \ldots,$$

sodass

$$M0 = M2 = M4 = \cdots = r \sin\alpha,$$
$$M1 = M3 = M5 = \cdots = r \sin\beta;$$

endlich den Winkeln

$$\varphi = 0,\ = \Phi,\ = 2\Phi,\ = 3\Phi,\ = 4\Phi = \cdots,$$

sodass

$$0M1 = 1M2 = 2M3 = 3M4 = \cdots = \Phi.$$

Von besonderer Wichtigkeit für die Kenntniss der Bewegung des sphärischen Pendels ist die Untersuchung, ob der Winkel Φ grösser oder kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist. Es wird im Folgenden nachgewiesen werden, dass er immer grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist. Damit ist dann zugleich gezeigt, dass der höchste Punkt des sphärischen Pendels auf einem kleinen Kugelkreise in der Richtung der Bewegung vorwärts schreitet.

§ 79.

Wir gehen nun zunächst dazu über, dem Ausdrucke für den Winkel Φ

$$\Phi = PT + iKZ(ia_1) + iKZ(ia_2 + K)$$

eine reelle Form zu geben. Dazu dienen die Formeln (1) und (8) des § 72 (S. 295 und 297):

$$iZ(iu) = -\operatorname{tg} am(u, k')\, \Delta am(u, k') + \frac{\pi u}{2KK'} + Z(u, k'),$$

Digitized by Google

$$iZ(iu+K)=\frac{-k'^2\sin am(u,k')\cos am(u,k')}{\Delta am(u,k')}+\frac{\pi u}{2KK'}+Z(u,k').$$

Mit ihrer Hülfe erhält man:

$$\Phi=PT-K\operatorname{tg} am(a_1,k')\Delta am(a^1,k')-\frac{Kk'^2\sin am(a_2,k')\cos am(a_2,k')}{\Delta am(a_2,k')}$$
$$+\frac{\pi(a_1+a_2)}{2K}+KZ(a_1,k')+KZ(a_2,k'),$$

und wenn man die beiden Functionen Z vermittelst des Additionstheorems der zweiten Gattung [(6) § 67)] vereinigt,

$$\left.\begin{aligned}\Phi=PT-K\operatorname{tg} am(a_1,k')\Delta am(a_2,k')-\frac{Kk'^2\sin am(a_2,k')\cos am(a_2,k')}{\Delta am(a_2,k')}\\ +k'^2K\sin am(a_1,k')\sin am(a_2,k')\sin am(a_1+a_2,k')\\ +\frac{\pi(a_1+a_2)}{2K}+KZ(a_1+a_2,k').\end{aligned}\right\}(34)$$

Hierin kommt nun das Argument a_1+a_2 vor. Die elliptischen Functionen desselben kann man mit Hülfe der Fundamentalformeln (32) § 29 aus den Formeln (30) ableiten. Man erhält dann:

$$\sin am(a_1+a_2,k')=\frac{k}{k'}\sqrt{\frac{\cos\beta+\cos\alpha}{\cos\beta-\cos\alpha}}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\beta},$$

$$\cos am(a_1+a_2,k')=\frac{k}{k'}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{\frac{\cos\beta+\cos\alpha}{\cos\beta-\cos\alpha}}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\beta},$$

$$\Delta am(a_1+a_2,k')=k\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{\cos\beta+\cos\alpha}{\cos\beta-\cos\alpha}}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\beta},$$

welche Ausdrücke sich mit Hülfe der Relationen

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\cos^2\tfrac{1}{2}\beta+\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\sin^2\tfrac{1}{2}\beta=\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{2}$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\cos^2\tfrac{1}{2}\beta-\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\sin^2\tfrac{1}{2}\beta=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}$$

auch in folgende umwandeln lassen:

$$\left.\begin{aligned}\sin am(a_1+a_2,k')=\frac{k}{k'}\cdot\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha}}\\ \cos am(a_1+a_2,k')=\frac{k}{k'}\cdot\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}}=\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha}}\\ \Delta am(a_1+a_2,k')=k\cdot\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}}.\end{aligned}\right\}(35)$$

Drückt man nun mit Hülfe dieser Formeln und der Formeln (30) alle in (34) vorkommenden elliptischen Functionen von a_1, a_2 und a_1+a_2 durch α und β aus und vereinigt diese

Digitized by Google

Ausdrücke mit dem ersten Gliede PT, welches nach (32) den Werth

$$PT = \frac{2kK \sin\beta}{\sin\alpha \sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}}$$

hat, so erhält man Φ in seiner einfachsten reellen Gestalt folgendermassen:

$$(36) \quad \Phi = \frac{kK \sin\beta \sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}} + \frac{\pi(a_1+a_2)}{2K'} + KZ(a_1+a_2, k'),$$

worin man dem ersten Gliede auch die Form

$$k'K \operatorname{tg}\alpha \cos am(a_1+a_2, k')$$

geben kann. Daraus ergiebt sich auch sofort eine Reihenentwickelung für Φ, wenn man die (13) § 63 gegebene Reihe für die Transcendente Z

$$Z(u) = \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \cdots\right\}$$

anwendet, nämlich

$$= \frac{kK \sin\beta \sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}} + \frac{\pi(a_1+a_2)}{2K'}$$
$$+ \frac{2\pi K}{K'}\left\{\frac{q'}{1-q'^2}\sin\frac{\pi(a_1+a_2)}{K'} + \frac{q'^2}{1-q'^4}\sin\frac{2\pi(a_1+a_2)}{K'}\right.$$
$$\left. + \frac{q'^3}{1-q'^6}\sin\frac{3\pi(a_1+a_2)}{K'} + \cdots\right\}.$$

Benutzt man hingegen die aus der Jacobi'schen Function hervorgehende Reihe (§ 68, S. 282), nämlich

$$Z(u) = \frac{2\pi}{K} \cdot \frac{q\sin\frac{\pi u}{K} - 2q^4\sin\frac{2\pi u}{K} + 3q^9\sin\frac{3\pi u}{K} - \cdots}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + \cdot},$$

so erhält man

$$\Phi = \frac{kK \sin\beta \sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}} + \frac{\pi(a_1+a_2)}{2K'}$$
$$+ \frac{2\pi K}{K'} \cdot \frac{q'\sin\frac{\pi(a_1+a_2)}{K'} - 2q'^4\sin\frac{2\pi(a_1+a_2)}{K'} + 3q'^9\sin\frac{3\pi(a_1+a_2)}{K'} - \cdots}{1 - 2q'\cos\frac{\pi(a_1+a_2)}{K'} + 2q'^4\cos\frac{2\pi(a_1+a_2)}{K'} - 2q'^9\cos\frac{3\pi(a_1+a_2)}{K'} + \cdots}.$$

§ 80.

Der im vorigen Paragraph ermittelte Ausdruck für Φ soll nun auch dazu benutzt werden, die Natur dieses Winkels

Digitized by Google

näher zu untersuchen, indem gezeigt werden soll: einmal, dass er immer gleich oder grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist, und zweitens, dass er, wenn ein bestimmter Werth von α festgehalten wird, desto grösser ist, je grösser β angenommen wird.

Suchen wir, um dieses zu zeigen, zuerst den Werth des Ausdrucks (36)

$$\left.\begin{aligned} \Phi = k' K \operatorname{tg} \alpha \cos am\,(a_1 + a_2,\, k') + \frac{\pi\,(a_1+a_2)}{2K'} \\ + KZ(a_1 + a_2,\, k') \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

für $\beta = 0$ auf, so ergiebt sich, weil aus den Formeln (35) $a_1 + a_2 = K'$ für $\beta = 0$ folgt, und $Z\,(K', k') = 0$ ist (§ 63, S. 258), alsdann

$$\Phi = \frac{\pi}{2}.$$

Wenn nun gezeigt werden kann, dass bei constant angenommenem α der Differentialquotient

$$\frac{d\Phi}{d\beta}$$

immer einen positiven Werth besitzt, so werden damit die obigen Behauptungen erwiesen sein. Es könnte als ein Widerspruch erscheinen, dass wir hier für Φ den Werth $\frac{\pi}{2}$ bei verschwindendem β finden, während wir früher in § 78 sahen, dass in diesem Falle der Winkel φ den Werth Null hat. Allein es kann leicht gezeigt werden, dass das im Allgemeinen periodische Glied des Ausdrucks (33) von φ für $\beta = 0$ den Werth $-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{T}$ annimmt. Da nämlich, wie wir schon § 78 sahen, alsdann

$$a_1 = 0, \quad a_2 = K'$$

ist, so ergiebt sich

$$\varphi = \frac{\Phi}{T} t + \tfrac{1}{2} i \log \frac{\Theta(u - [K + iK'])}{\Theta(u + [K + iK'])};$$

aus der Formel

$$\Pi(u, a) = u Z(a) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)}$$

aber erhält man, weil $\Pi(u, K + iK') = 0$ ist, (§ 21, S. 79)

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - [K + iK'])}{\Theta(u + [K + iK'])} = - u Z(K + iK') = \frac{i\pi}{2K} u,$$

Digitized by Google

wie aus der Formel (4) (§ 71, S. 296) für $Z(u + iK')$ leicht gefolgert werden kann. Demnach ist in der That, wenn noch für u sein Werth $\frac{Kt}{T}$ substituirt wird,

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{T} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{T} = 0.$$

Um den Differentialquotienten $\frac{d\Phi}{d\beta}$, auf dessen Zeichen alles ankommt, zu entwickeln, müssen wir zuerst dem Ausdrucke (37) eine etwas andere Gestalt geben. Führt man statt der Function Z die Function E ein, indem nach Formel (14) (§ 63, S. 258)

$$Z(u) = E(u) - \frac{E}{K} u,$$

also auch

$$Z(a_1 + a_2, k') = E(a_1 + a_2, k') - \frac{E'}{K'}(a_1 + a_2)$$

ist, so erhält man

$$\Phi = k' K \operatorname{tg} \alpha \cos am(a_1 + a_2, k') + \frac{a_1 + a_2}{K'}\left(\frac{\pi}{2} - KE'\right) + KE(a_1 + a_2, k'),$$

und wenn man die in § 70 bewiesene Relation

$$K'E + KE' - KK' = \frac{\pi}{2}$$

anwendet,

$$\Phi = k' K \operatorname{tg} \alpha \cos am(a_1 + a_2, k') + (a_1 + a_2)(E - K) + KE(a_1 + a_2, k').$$

Hierin ersetzen wir nun das Argument $a_1 + a_2$ durch die Amplitude, indem

$$am(a_1 + a_2, k') = \sigma$$

sei; dann wird mit Anwendung der Legendre'schen Bezeichnung

$$\Phi = k' K \operatorname{tg} \alpha \cos \sigma + (E - K) F(\sigma, k') + KE_1(\sigma, k').$$

Dieser Ausdruck soll nun vollständig nach β differentiirt, α aber als constant betrachtet werden. Dann kann man setzen

$$(38) \quad \ldots \quad \frac{d\Phi}{d\beta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \cdot \frac{d\sigma}{d\beta} + \frac{\partial \Phi}{\partial (k'^2)} \cdot \frac{d(k'^2)}{d\beta},$$

indem man bei der Differentiation nach k'^2 zugleich auf die

Digitized by Google

Veränderlichkeit von K und E Rücksicht nimmt, und zeigen, dass beide Glieder des vorstehenden Ausdrucks positiv sind.

Aus den Gleichungen (35) folgt

$$\sigma = am\,(a_1 + a_2, k') = \operatorname{arc\,tg}\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha}.$$

Durch Differentiation nach β erhält man daraus

$$\frac{d\sigma}{d\beta} = -\frac{k^2}{k'^2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta-\cos\alpha};$$

differentiirt man ebenso

$$k'^2 = \frac{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta},$$

so erhält man

$$\frac{d(k'^2)}{d\beta} = 2\sin\beta\,\frac{\cos^2\alpha(\cos\alpha+\cos\beta)+\cos\beta(1+\cos\alpha\cos\beta)}{(1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta)^2};$$

dieser Ausdruck ist immer positiv.

Nun erhält man ferner

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} = -k'K\operatorname{tg}\alpha\sin\sigma - \frac{K-E}{\Delta(\sigma,k')} + K\Delta(\sigma,k');$$

substituirt man darin die (35) gegebenen Ausdrücke für $\sin\sigma$ und $\Delta(\sigma, k')$, so findet man

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} = -\frac{kK\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}} - \frac{(K-E)\sqrt{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}}{k\sin\alpha\cos\beta}.$$

Nun ist $K-E$ eine positive Grösse; denn drückt man dieselbe durch ihre Integrale aus, so ist

$$K-E = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta\varphi\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi},$$

mithin positiv, weil die unter dem Integralzeichen stehende Function innerhalb der Integrationsgrenzen nur positive und endliche Werthe annimmt. Wenn daher $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ist, so wird sowohl $\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}$ als auch $\frac{d\sigma}{d\beta}$ negativ, also das Product $\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{d\beta}$ positiv. Ist dagegen $\alpha > \frac{\pi}{2}$, so kann man dasselbe Product in folgende Gestalt bringen:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{d\beta} = \frac{k^2}{k'^2(\cos\beta-\cos\alpha)}\left\{K\frac{k\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}} + (K-E)\frac{\cos\alpha\sqrt{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}}{k\sin\alpha\cos\beta}\right\}$$

Digitized by Google

$$= \frac{k^2}{k'^2(\cos\beta - \cos\alpha)} \left\{ \frac{K(\cos\beta + \cos\alpha)(1 + \cos\alpha\cos\beta)}{\sin\alpha\cos\beta\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta}} \right.$$
$$\left. - E\frac{\cos\alpha\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}}{k\sin\alpha\cos\beta} \right\},$$

in welcher das erste Glied immer, und das zweite Glied gerade dann positiv ist, wenn $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ist. Demnach ist erwiesen, dass das erste Product des Ausdrucks (38) immer einen positiven Werth hat.

Die Differentiation nach k'^2 liefert

$$\frac{\partial\Phi}{\partial(k'^2)} = \frac{K\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\sigma}{2k'} + k'\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\sigma\frac{dK}{d(k'^2)} + F(\sigma,k')\frac{d(E-K)}{d(k'^2)}$$
$$+ (E-K)\frac{\partial F(\sigma,k')}{\partial(k'^2)} + E_1(\sigma,k')\frac{dK}{d(k'^2)} + K\frac{\partial E_1(\sigma,k')}{\partial(k'^2)}.$$

Zur Reduction dieses Ausdrucks benutze man die in § 70 abgeleiteten Formeln

$$\frac{dK}{d(k'^2)} = \frac{K}{2k^2} - \frac{E}{2k^2k'^2} \qquad \frac{d(E-K)}{d(k'^2)} = \frac{E}{2k'^2}$$
$$= -\frac{K}{2k'^2} + \frac{K-E}{2k^2k'^2}, \qquad = \frac{K}{2k'^2} - \frac{K-E}{2k'^2},$$

ferner

$$\frac{\partial F(\sigma,k')}{\partial(k'^2)} = \frac{E_1(\sigma,k')}{2k^2k'^2} - \frac{F(\sigma,k')}{2k'^2} - \frac{\sin\sigma\cos\sigma}{2k^2\Delta(\sigma,k')},$$
$$\frac{\partial E_1(\sigma,k')}{\partial(k'^2)} = \frac{E_1(\sigma,k') - F(\sigma,k')}{2k'^2}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke und ordnet nach den Factoren K und $K - E$, so heben sich die in K multiplicirten Glieder auf, und die anderen geben

$$\frac{\partial\Phi}{\partial(k'^2)} = \frac{(K-E)\sin\beta}{2k\,k'^2\sin\alpha\cos\beta}\sqrt{\frac{\cos\beta + \cos\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha}}.$$

Dieser Ausdruck ist nun stets positiv, ebenso war es auch $\frac{d(k'^2)}{d\beta}$; folglich hat auch das zweite Product $\frac{\partial\Phi}{\partial(k'^2)} \cdot \frac{d(k'^2)}{d\beta}$ und somit $\frac{d\Phi}{d\beta}$ stets einen positiven Werth.

Da nun der Winkel Φ für $\beta = 0$ den Werth $\frac{\pi}{2}$ hat und wegen des stets positiven Differentialquotienten $\frac{d\Phi}{d\beta}$ mit wachsendem β ebenfalls wächst, so ist Φ nicht allein stets gleich oder grösser als $\frac{\pi}{2}$, sondern auch desto grösser, je

Digitized by Google

grösser bei festgehaltenem α der Winkel β angenommen wird. Hieraus ist alsdann ersichtlich, dass das sphärische Pendel bei jeder Schwingung einen Ausschlag nach der Seite der Bewegungsrichtung hin macht, und dass dieser Ausschlag desto grösser ausfällt, je grösser die kleinste Ablenkung von der Verticallinie im Vergleich zur grössten Ablenkung ist.

Zwanzigster Abschnitt.

Ueber Functionen einer complexen Variablen und die Vieldeutigkeit bestimmter Integrale.

§ 81.

Unter einer complexen Grösse versteht man eine Grösse von der Form

$$x + iy,$$

in welcher x und y reell, und $i = \sqrt{-1}$ ist. Die Bezeichnung complex in dieser engeren Bedeutung ist erst seit *Gauss* in Aufnahme gekommen; früher verstand man darunter jeden irgendwie aus ungleichartigen Theilen bestehenden Ausdruck. Setzt man

$$x + iy = z,$$

und nimmt man x und y als stetig veränderlich an, so nennt man z eine stetig veränderliche complexe Grösse.

Als das geometrische Bild einer reellen Veränderlichen betrachtet man bekanntlich einen auf einer festen Geraden (der Abscissenaxe) sich bewegenden Punkt, indem jeder reelle Werth der Veränderlichen durch den Abstand des beweglichen Punktes von einem festen Punkte (dem Nullpunkte) dargestellt wird. Als das geometrische Bild einer complexen Variablen betrachtet man dagegen einen auf beliebige Weise in der Ebene beweglichen Punkt, und zwar so, dass in jeder Lage desselben die Werthe der beiden reellen Variablen x und y, von denen der Werth der complexen Variablen z abhängt,

Digitized by Google

durch die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes dargestellt werden. Danach wird durch jeden reellen Werth von z (bei welchem also $y = 0$) ein Punkt der Abscissenaxe, durch jeden rein imaginären Werth, d. h. durch jeden Werth von der Form iy (bei welchem also $x = 0$) aber ein Punkt der Ordinatenaxe bestimmt. Ferner entspricht jedem beliebigen Werthe von z irgendwo ein Punkt in der Ebene, und umgekehrt kann zu jedem gegebenen Punkte der entsprechende Werth von z gefunden werden. Giebt man der complexen Variablen die Form

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so stellt der Modul r die Entfernung des Punktes vom Nullpunkte (den Radius Vector des Punktes), und φ die Neigung des letzteren gegen die Abscissenaxe dar. Man kann daher auch sagen, dass durch eine complexe Grösse eine gerade Linie ihrer Länge und Richtung nach dargestellt wird, nämlich die von dem Nullpunkte zu dem darstellenden Punkte führende Gerade, oder auch jede der letzteren gleiche und mit ihr direct parallele Gerade.

Daraus ergiebt sich leicht, dass die Summe zweier complexen Grössen

$$z_2 + z_1 = x_2 + x_1 + i(y_2 + y_1)$$

diejenige Gerade darstellt, welche von dem Nullpunkte nach dem vierten Eckpunkte des Parallelogramms hinführt, dessen Seiten die durch z_1 und z_2 dargestellten Geraden sind. Ebenso erhellt leicht, dass die Differenz zweier complexen Werthe

$$z_2 - z_1 = x_2 - x_1 + i(y_2 - y_1)$$

die Gerade $z_1 z_2$ ihrer Länge und Richtung nach (von z_1 nach z_2) darstellt.

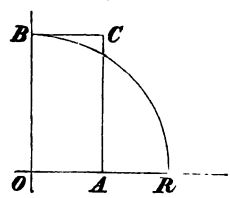
Da der Modul einer complexen Grösse die absolute Länge der durch die letztere dargestellten Geraden angiebt, so vertritt derselbe gleichsam die Stelle eines absoluten Werthes der complexen Grösse; wenn man daher mehrere complexe Werthe ihrer Grösse nach mit einander zu vergleichen hat, so muss man die Werthe ihrer Moduln dabei in Betracht ziehen.

Wenn die complexe Variable z eine Reihe stetig aufeinander folgender Werthe annimmt, so durchläuft der dar-

Digitized by Google

stellende Punkt eine in einem ununterbrochenen Zuge fortgehende Linie. Da die Veränderung von z durch zwei gänzlich von einander unabhängige Variable, x und y oder r und φ, bestimmt wird, so kann man sich die Veränderung von z in jeder beliebigen Linie vor sich gehend denken. Dabei verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass es zur Stetigkeit der Veränderung von z durchaus nicht nothwendig ist, dass die von dem beweglichen Punkte beschriebene Linie eine nach einem und demselben mathematischen Gesetze fortgehende Curve sei; sie kann vielmehr beliebig aus verschiedenen geraden oder krummen Linien zusammengesetzt sein. Damit die Veränderung von z stetig vor sich gehe, ist nur erforderlich, dass die Linie einen ununterbrochenen Zug bilde. Es scheint für das Folgende nützlich zu sein, dieses an einigen Beispielen näher zu erläutern. Denken wir uns, die Variable z beginne ihre Veränderung mit dem Werthe $z = 0$ und gelange, nachdem sie eine Reihe von Werthen durchlaufen hat, zu dem Werthe ib, welcher durch den Punkt B (Fig. 20) auf der Ordinatenaxe dargestellt werden möge, indem die Entfernung $OB = b$ sei. Dann kann die Variable z (so drücken wir uns kurz aus, anstatt zu sagen: der bewegliche Punkt, welcher den jedesmaligen Werth der Variablen z darstellt) auf sehr verschiedenen Wegen von O nach B gelangen. Erstlich möge sie die gerade Linie OB durchlaufen, dann bleibt x constant $= 0$, während y nach und nach alle reellen Werthe von 0 bis b annimmt. Zweitens durchlaufe die Variable z die aus den drei Seiten eines Rechtecks bestehende gebrochene Linie $OACB$, bei welcher $OA = a$ sei. Dann ist y von O bis A constant $= 0$, und x wächst von 0 bis a; alsdann bleibt x auf dem Wege AC bei dem erlangten Werthe a stehen, und y wächst von 0 bis b; endlich bleibt von C bis B nun y constant $= b$, und x nimmt von a bis 0 ab. Drittens möge die Variable z zuerst auf der Abscissenaxe von O bis R fortgehen (wo $OR = b$) und dann den Kreisbogen RB beschreiben. Setzt man für diesen Fall

Fig. 20.

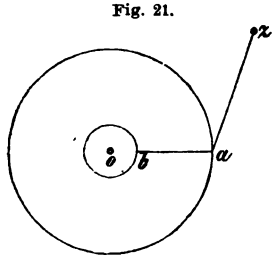


$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

Digitized by Google

so ist auf OR zuerst φ constant $= 0$, und r wächst von 0 bis b; alsdann bleibt r auf RB constant $= b$, und φ wächst von 0 bis $\frac{\pi}{2}$. Untersuchen wir als ein letztes Beispiel noch den Gang der reellen Veränderlichen, während der bewegliche Punkt folgenden Weg beschreibt: Er gehe zuerst von einem Punkte a auf der Abscissenaxe bis zu einem in der Nähe des Nullpunktes o liegenden Punkte b (Fig. 21), beschreibe dann einen ganzen Kreis um o mit dem Halbmesser $ob = \varrho$ und kehre wieder von b nach a zurück. Es sei $oa = a$; setzt man $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, so ist während des Weges ab die Variable φ constant $= 0$, und r nimmt von a bis ϱ ab. Alsdann bleibt während des Durchlaufens der Peripherie des Kreises r constant $= \varrho$, und φ wächst von 0 bis 2π (wird der Kreis in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so nimmt φ von 0 bis -2π ab). Endlich, während die Variable von b nach a zurückkehrt, bleibt φ constant $= 2\pi$, und r wächst wieder von ϱ bis a.

Fig. 21.



Man sieht aus diesen Beispielen, dass zwischen einer complexen und einer reellen Variablen ein sehr wesentlicher Unterschied stattfindet. Während durch zwei bestimmte Werthe einer reellen Variablen die Reihe der dazwischen liegenden Werthe, welche die Variable annehmen muss, um von dem ersten zum zweiten Werthe zu gelangen, schon mitbestimmt ist, ist dies bei einer complexen Variablen keineswegs der Fall; vielmehr giebt es unendlich viele Reihen stetig auf einander folgender Werthe, welche von einem bestimmten Werthe einer complexen Variablen zu einem anderen bestimmten Werthe hinführen. Geometrisch ausgedrückt heisst dies: Eine reelle Variable kann nur auf einem einzigen Wege von einem Werthe zu einem anderen gelangen, nämlich nur auf dem zwischen den beiden entsprechenden Punkten liegenden Stücke der Abscissenaxe. Eine complexe Variable dagegen kann man auf unendlich vielen verschiedenen Linien oder Wegen von einem Werthe zu einem anderen gehen lassen.

Digitized by Google

§ 82.

Es sei $u = f(z)$ eine Function der complexen Variablen $z = x + iy$. Da man eine solche wieder auf die Form einer complexen Grösse bringen kann, so wird man setzen können

$$u = X + iY,$$

worin X und Y reelle Functionen von x und y bedeuten. Allein auf dieselbe Form kann man auch jede imaginäre oder reelle Function von x und y bringen, auch wenn in ihr x und y nicht gerade einzig und allein in der Verbindung $x + iy$ enthalten sind; und es leuchtet ein, dass nicht jede complexe Function von x und y zugleich eine Function der complexen Variablen z, d. h. eine Function von x und y in der bestimmten Verbindung $x + iy$ ist. Z. B. $x - iy$, $x^2 + y^2$, $2x + iy$ sind nicht Functionen von $x + iy$, obwohl sie Functionen von x und y sind. Wir haben daher zunächst die Bedingungen aufzusuchen, welchen X und Y genügen müssen, damit

$$u = X + iY$$

wirklich eine Function von z, d. h. von $x + iy$ sei.

Wenn dieser Fall stattfinden soll, muss man offenbar haben

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y},$$

oder da

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = i$$

ist,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dz}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = i\frac{du}{dz}.$$

Demnach ergiebt sich

$$\frac{du}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Substituirt man darin $u = X + iY$, so erhält man

$$\frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial y} + i\frac{\partial Y}{\partial y}\right),$$

welche complexe Gleichung sogleich in die beiden reellen Gleichungen

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

zerfällt. Demnach enthalten die Gleichung (1), nämlich

Digitized by Google

$$\frac{\partial u}{\partial y} = i\,\frac{\partial u}{\partial x},$$

oder die daraus gefolgerten Gleichungen (2) die nothwendige Bedingung dafür, dass u eine Function von z sei.

Aber diese Bedingung ist auch hinreichend. Substituirt man dieselbe nämlich in das vollständige Differential

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy,$$

so erhält man

$$(3)\quad \cdots\quad du = \frac{\partial u}{\partial x}\,(dx + i\,dy) = \frac{\partial u}{\partial x}\,dz.$$

Eliminirt man nun die Variable x mit Hülfe der Gleichung $z = x + iy$, sodass u dann eine Function von y und z wird, und unterscheidet die nach der Elimination gebildeten Differentialquotienten nach y und z von den vorigen durch Klammern, so ist auch

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) dz.$$

Die Subtraction dieser Gleichung von (3) liefert

$$0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial u}{\partial x}\right] dz,$$

welche Gleichung für willkürliche Werthe von dy und dz erfüllt sein muss. Daher folgt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Nachdem also aus u die Variable x mit Hülfe der Gleichung $z = x + iy$ eliminirt worden ist, enthält u auch kein y mehr, sondern ist eine Function von z allein.

Damit ist dargethan, dass die Gleichungen (2) die nothwendige und hinreichende Bedingung enthalten, dass $X + iY$ eine Function von $x + iy$ sei. Wir können daraus noch eine andere wichtige Folgerung ziehen. Bildet man nämlich die Derivirte $\frac{du}{dz}$, so erhält man

$$\frac{du}{dz} = \frac{dX + i\,dY}{dx + i\,dy} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x}\,dx + \frac{\partial X}{\partial y}\,dy + i\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Y}{\partial y}\,dy\right)}{dx + i\,dy}$$

$$(4)\quad \cdots\quad = \frac{\frac{\partial X}{\partial x} + i\,\frac{\partial Y}{\partial x} + \left(\frac{\partial X}{\partial y} + i\,\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}}{1 + i\,\frac{dy}{dx}}.$$

Digitized by Google

In Folge der Gleichungen (2) aber verwandelt sich dies in

$$\frac{du}{dz} = \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\left(1 + i\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}} = \frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x},$$

oder auch in

$$\frac{du}{dz} = \frac{\frac{1}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial y} + i\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\left(1 + i\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial y} + i\frac{\partial Y}{\partial y}\right),$$

was wieder mit den Bedingungsgleichungen

$$\frac{du}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

übereinstimmt. Dies zeigt nun, dass die Derivirte $\frac{du}{dz}$ von dem Differentialverhältniss $\frac{dy}{dx}$ unabhängig ist. Um die Bedeutung davon einzusehen, erinnern wir uns, dass die Veränderung der Variablen z auf einem beliebigen Wege vor sich gehen kann. Nehmen wir nun an, es geschehe dies auf irgend einer Curve, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten

$$y = \varphi(x)$$

sei, dann giebt der Werth des Differentialverhältnisses $\frac{dy}{dx}$ die Richtung dieser Curve im Punkte z an. Wenn nun die Derivirte $\frac{du}{dz}$ von $\frac{dy}{dx}$ unabhängig ist, so heisst dies, dass sie für jeden Weg, den die Variable z einschlagen mag, denselben Werth hat; mit anderen Worten, dass die Derivirte $\frac{du}{dz}$ von der Art, in welcher die Variable z sich verändert, unabhängig ist. Bei einer Function einer reellen Variablen kommt die Veränderung der Variablen selbst nicht in Betracht, weil diese Veränderung eben nur auf eine einzige Art vor sich gehen kann. Bei Functionen von einer complexen Variablen dagegen spielt gerade die Verschiedenartigkeit, mit der die Variable sich verändern kann, eine grosse Rolle, und es ist daher von grosser Wichtigkeit zu zeigen, dass die Derivirte einer Function einer complexen Variablen von der Art der Veränderung der Variablen unabhängig ist.

Nun leuchtet aber auf der anderen Seite ein, dass, wenn

Digitized by Google

dieses nicht der Fall wäre, der Begriff der Derivirten bei complexen Variablen gar nicht bestimmt sein würde, wenigstens nicht in der Weise bestimmt, wie bei reellen Variablen*); daher hat *Riemann***) diese Bedingung der Unabhängigkeit der Derivirten von dem Werthe des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ zur Definition einer Function von einer complexen Variablen benutzt, und es soll nun noch in der Kürze gezeigt werden, dass man hievon ausgehend auch zu den nämlichen Bedingungsgleichungen (2) gelangt. Wir haben oben unter (4) schon den vollständigen Ausdruck für die Derivirte $\frac{du}{dz}$ ermittelt. Multiplicirt man beiderseits mit $1 + i\frac{dy}{dx}$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{du}{dz} - \frac{\partial X}{\partial x} - i\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\left(i\frac{du}{dz} - \frac{\partial X}{\partial y} - i\frac{\partial Y}{\partial y}\right) = 0,$$

welche zufolge der gemachten Forderung von $\frac{dy}{dx}$ unabhängig sein muss. Es muss daher für sich

$$\frac{du}{dz} = \frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x}, \text{ und } i\frac{du}{dz} = \frac{\partial X}{\partial y} + i\frac{\partial Y}{\partial y}$$

sein. Hieraus fliessen dann wieder wie oben die beiden Bedingungen

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Hienach ist also, wenn $u = X + iY$ eine Function von $z = x + iy$ sein soll, keine der Functionen X und Y ganz willkürlich. Vielmehr findet man durch nochmalige Differentiation der vorigen Gleichungen

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0,$$

*) Bei reellen Veränderlichen ist die Derivirte unabhängig von dem unendlich kleinen Zuwachs der Variablen. Soll dasselbe auch bei complexen Variablen stattfinden, so muss die Derivirte nicht allein von der Länge, sondern auch von der Richtung der unendlich kleinen, durch dz dargestellten Linie unabhängig sein; und dieses letztere wird durch die Unabhängigkeit von $\frac{dy}{dx}$ erreicht.

**) *Riemann*, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. (Inaug.-Diss.) Göttingen 1851.

Cauchy bezeichnet $X + iY$ auch dann als Function von $x + iy$, wenn nur X und Y reelle Functionen von x und y sind; wenn die obige Bedingung erfüllt ist, nennt er die Function monogen. (Exercices d'analyse et de physique mathématique. Tome IV. p. 346.)

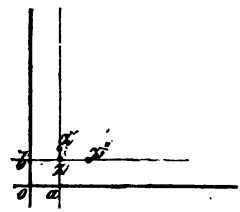
Digitized by Google

dass also beide Functionen der nämlichen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen müssen.

Die vorstehende Bedingung enthält eine interessante geometrische Beziehung, die noch kurz erwähnt werden möge. Ebenso wie durch jeden Werth der Variablen $z = x + iy$ die Lage eines Punktes in der Ebene bestimmt ist, wird auch durch jeden Werth der Function $u = X + iY$ die Lage eines Punktes in derselben oder in einer anderen Ebene bestimmt, indem X und Y die rechtwinkligen Coordinaten dieses Punktes sind. Wenn u eine Function von z ist, so ist die Lage des Punktes u von der Lage des Punktes z abhängig, und beschreibt der bewegliche Punkt z eine Curve, so wird auch der Punkt u eine von der letzteren abhängige Curve beschreiben.

Wir wollen nun die Beziehung aufsuchen, in welcher zwei solche Curven stehen müssen, wenn die Bedingung, dass die Derivirte $\frac{du}{dz}$ von $\frac{dy}{dx}$, d. h. von der Grösse und Richtung von dz unabhängig ist, erfüllt sein soll*).

Fig. 22.



Es seien z' und z'' (Fig. 22) zwei unendlich nahe an einem dritten Punkte z gelegene Punkte, und man setze die unendlich kleinen Verbindungslinien

$$zz' = dz', \quad zz'' = dz''.$$

Ferner seien u, u', u'' (Fig. 23) die den Punkten z, z', z'' entsprechenden Punkte, und die ebenfalls unendlich kleinen Verbindungslinien

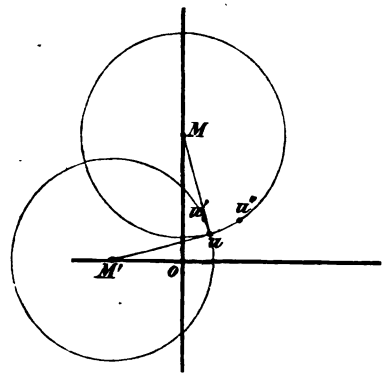
$$uu' = du', \quad uu'' = du''.$$

Dann besteht die obige Bedingung darin, dass

$$\frac{du'}{dz'} = \frac{du''}{dz''} \quad \text{oder} \quad \frac{du'}{du''} = \frac{dz'}{dz''}$$

sein muss.

Fig. 23.



*) *Riemann*, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. S. 3.

Digitized by Google

Setzt man aber

$$\begin{aligned} dz' &= zz' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'),\\ du' &= uu' = \varrho'(\cos\psi' + i\sin\psi'),\\ dz'' &= zz'' = r''(\cos\varphi'' + i\sin\varphi''),\\ du'' &= uu'' = \varrho''(\cos\psi'' + i\sin\psi''), \end{aligned}$$

so folgt

$$\begin{aligned} &\frac{\varrho'}{\varrho''}(\cos(\psi' - \psi'') + i\sin(\psi' - \psi''))\\ &= \frac{r'}{r''}(\cos(\varphi' - \varphi'') + i\sin(\varphi' - \varphi'')), \end{aligned}$$

also

$$\frac{\varrho'}{\varrho''} = \frac{r'}{r''}, \text{ und } \psi' - \psi'' = \varphi' - \varphi'';$$

in den Dreiecken $z\,z'\,z''$ und $u\,u'\,u''$ sind also die Winkel $z'\,z\,z''$ und $u'\,u\,u''$ einander gleich, und die sie einschliessenden Seiten proportional; die beiden Dreiecke sind also ähnlich. Da nun dies für jedes Paar entsprechender Punkte, z und u, stattfinden muss, so ist die von dem Punkte u beschriebene Figur der von dem Punkte z beschriebenen in ihren kleinsten Theilen ähnlich, und zwei sich schneidende Curven in der Ebene der u bilden denselben Winkel mit einander, wie die entsprechenden Curven in der Ebene der z.

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, betrachten wir die Function

$$u = \operatorname{tg} z.$$

Da $z = x + iy$ ist, so erhält man

$$u = \operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} iy}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} iy},$$

und mit Berücksichtigung der Relation

$$\operatorname{tg} iy = i\,\frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}},$$

nach einer leichten Rechnung

$$(5)\quad X = \frac{2\sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x}, \qquad Y = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x}$$

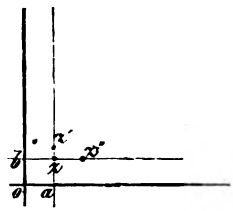
und

$$u = X + iY.$$

Digitized by Google

Zuerst lassen sich durch Differentiation dieser Ausdrücke die Bedingungsgleichungen (2) leicht verificiren. Nimmt man ferner an, der Punkt z bewege sich auf einer der Abscissenaxe in der Entfernung b parallelen Geraden (Fig. 22), so ist y constant $= b$, während x veränderlich bleibt. Um nun die Curve zu finden, welche der Punkt u beschreibt, während z in der angegebenen Weise sich bewegt, hat man nur in den Ausdrücken (5) $y = b$ zu setzen und x zu eliminiren. Dann erhält man zwischen den rechtwinkligen Coordinaten X und Y des Punktes u die Gleichung

Fig. 22.



$$X^2 + Y^2 - 2\frac{e^{2b} + e^{-2b}}{e^{2b} - e^{-2b}} Y + 1 = 0, \quad \cdot \cdot \quad \text{(M)}$$

welche die Gleichung eines Kreises ist, dessen Mittelpunkt M (Fig. 23) auf der Ordinatenaxe in der Entfernung

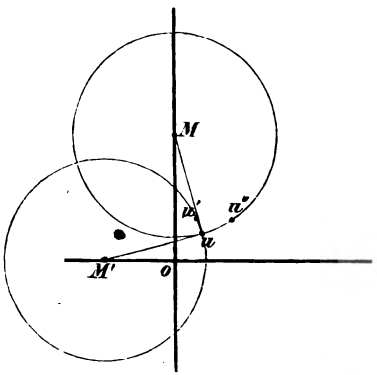
$$\frac{e^{2b} + e^{-2b}}{e^{2b} - e^{-2b}}$$

vom Anfangspunkte liegt, und dessen Radius ϱ

$$\varrho = \pm \frac{2}{e^{2b} - e^{-2b}}$$

ist. Lässt man ferner den Punkt z sich auf einer der Ordinatenaxe in der Entfernung a parallelen Geraden bewegen (Fig. 22), so findet man die entsprechende Curve für den Punkt u, wenn man in (5) $x = a$ setzt und y eliminirt. Dann ergiebt sich die Gleichung

Fig. 23.



$$X^2 + Y^2 + 2 \operatorname{cotg} 2a \, X - 1 = 0, \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \text{(M')}$$

welche ebenfalls einen Kreis darstellt, dessen Mittelpunkt M' (Fig. 23) auf der Abscissenaxe in der Entfernung $-\operatorname{cotg} 2a$ vom Anfangspunkte liegt und den Radius ϱ'

$$\varrho' = \pm \frac{2}{\sin 2a}$$

hat.

Digitized by Google

Wenn also der Punkt z sich auf zwei einander rechtwinklig durchschneidenden, den Coordinatenaxen parallelen Geraden bewegt, so bewegt sich der Punkt u auf zwei Kreisen, deren Mittelpunkte auf den Coordinatenaxen liegen. Nach der obigen allgemeinen Betrachtung aber müssen, weil die Geraden rechtwinklig auf einander stehen, auch die Kreise sich rechtwinklig durchschneiden. Dies zu verificiren ist nicht schwer, da man leicht zeigen kann, dass die aus dem Mittelpunkte jedes Kreises an den andern Kreis gezogene Tangente dem Radius des ersten Kreises gleich ist. Man erhält bekanntlich das Quadrat der aus einem beliebigen Punkte an einen Kreis gelegten Tangente, wenn man in den linken Theil der auf Null gebrachten und durch den Coefficienten von X^2 und Y^2 dividirten Gleichung des Kreises die Coordinaten des Punktes, aus dem die Tangente gelegt werden soll, substituirt. Nun sind die Coordinaten des Mittelpunktes des Kreises (M)

$$0 \text{ und } \frac{e^{2b} + e^{-2b}}{e^{2b} - e^{-2b}}.$$

Substituirt man diese Werthe in den linken Theil der Gleichung (M'), so erhält man

$$\left(\frac{e^{2b} + e^{-2b}}{e^{2b} - e^{-2b}}\right)^2 - 1 = \frac{4}{(e^{2b} - e^{-2b})^2},$$

und dies ist in der That das Quadrat des Radius ϱ. Ebenso sind die Coordinaten des Mittelpunktes des Kreises (M') resp. $-\operatorname{cotg} 2a$ und 0. Diese in den linken Theil der Gleichung (M) substituirt, geben für das Quadrat der Tangente

$$\operatorname{cotg}^2 2a + 1 = \frac{1}{\sin^2 2a},$$

also das Quadrat des Radius ϱ'. Die beiden Kreise durchschneiden sich daher in der That rechtwinklig. Nimmt man, wie es in der Figur geschehen ist, a positiv und $< \frac{\pi}{4}$, und b ebenfalls positiv an, so werden die Ausdrücke von X und Y für $x = a$ und $y = b$ beide positiv, daher entspricht dem Punkte z der Punkt u. Man erhält ferner

Digitized by Google

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 4 \cdot \frac{\left(e^{2y} + e^{-2y}\right)\cos 2x + 2}{\left(e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x\right)^2},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 4 \cdot \frac{\left(e^{2y} - e^{-2y}\right)\sin 2x}{\left(e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x\right)^2}.$$

Da diese Ausdrücke in der Nähe des Punktes u ebenfalls positiv sind, so wachsen in dem Kreise M mit wachsendem x sowohl X als auch Y; und da ferner

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x},$$

so nimmt im Kreise M' die Abscisse X mit wachsendem y ab, während Y wächst. Wenn daher der Punkt z nach z' geht, so geht u nach u'; geht aber z nach z'', so bewegt sich u nach u''. Die Figuren machen ferner anschaulich, dass die ziemlich nahe bei einander liegenden Punkte z, z', z'' ein Dreieck einschliessen, welches dem von den entsprechenden Punkten u, u', u'' gebildeten Dreiecke nahezu ähnlich ist.

§ 83.

Wenn eine Function vollkommen eindeutig ist, d. h. wenn jedem Werthe der Veränderlichen nur ein einziger Werth der Function entspricht, wie bei den algebraischen rationalen, den Exponential- und trigonometrischen Functionen, so muss offenbar der Werth, den die Function in irgend einem Punkte z (d. h. für irgend einen Werth der Variablen z) erhält, ganz unabhängig sein von dem Wege, auf welchem die Variable zu jenem Punkte gelangt ist; denn wäre dies nicht, so müsste die Function für denselben Werth der Variablen verschiedene Werthe annehmen können. Anders aber verhält sich die Sache bei den zwei- und mehrdeutigen Functionen. Bei diesen ist in der That der Weg, auf welchem die Variable zu einem Punkte gelangt, von Einfluss auf den Werth, welchen die Function in diesem Punkte annimmt. Ob nämlich eine zwei- oder mehrdeutige Function diesen oder jenen ihrer Werthe in irgend einem Punkte erhält, hängt ab: erstens von dem Werthe, den man der Function im Ausgangspunkte der Veränderlichen giebt, und zweitens von der Beschaffenheit des Weges, auf welchem die Veränderliche von dem

Digitized by Google

Ausgangspunkte zu dem zu untersuchenden Punkte hingeht. Es kommt dabei darauf an, ob zwei Wege, welche von einem Punkte z_0 zu einem anderen Punkte z hinführen, gewisse Punkte, die wir mit *Cauchy**) ausgezeichnete Punkte (*points singuliers*) nennen wollen, einschliessen oder nicht. Diese Punkte sind solche, in welchen entweder die Function unendlich oder unstetig wird, oder in welchen zwei oder mehrere, im Allgemeinen verschiedene, Werthe der Function einander gleich werden. Nehmen wir z. B. die Function

$$u = c + \sqrt{\frac{z-a}{z-b}},$$

so besitzt sie im Allgemeinen zwei Werthe für jeden Werth von z, nämlich

$$c + \sqrt{\frac{z-a}{z-b}} \quad \text{und} \quad c - \sqrt{\frac{z-a}{z-b}};$$

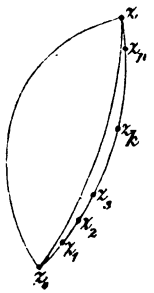
für den speciellen Werth $z = a$ (oder in dem Punkte $z = a$) aber fallen diese beiden Werthe in den einen $u = c$ zusammen; ausserdem wird die Function für $z = b$ unendlich und unstetig; daher sind

$$z = a \quad \text{und} \quad z = b$$

die beiden ausgezeichneten Punkte für diese Function.

Wir setzen voraus, dass die ausgezeichneten Punkte einer zu untersuchenden Function discrete, in endlichen Entfernungen von einander befindliche, Punkte sind, und nehmen ferner an, dass die verschiedenen Werthe, welche die Function in einem und demselben Punkte z annehmen kann, um endliche Grössen von einander verschieden sind, so lange der Punkt z einem ausgezeichneten Punkte nicht unendlich nahe liegt. Betrachtet man nun zwei einander unendlich nahe liegende Wege, welche von einem Punkte z_0 zu einem anderen Punkte z führen (Fig. 24), ohne durch einen ausgezeichneten Punkt hindurch zu gehen, so kann man zeigen, dass eine Function auf beiden Wegen in z denselben Werth erhält, wenn sie von dem Punkte z_0

Fig. 24.



*) *Cauchy*, Exercices d'analyse et de physique mathématique Tome IV. p. 327.

Digitized by Google

beide Male mit demselben Werthe ausgeht*). Stellen wir uns vor, zwei bewegliche Punkte durchliefen die beiden Wege in der Art, dass sie gleichzeitig z_0 verlassen, gleichzeitig in z ankommen und stets einander unendlich nahe bleiben. Es seien $u_1, u_2, u_3, \ldots$ die stetig auf einander folgenden Werthe, welche die Function in den stetig auf einander folgenden Punkten $z_1, z_2, z_3, \ldots$ des einen Weges nanimmt, $v_1, v_2, v_3, \ldots$ die ebenfalls stetig auf einander folgenden Werthe der Function auf dem anderen Wege, so dass je zwei Werthe u_k, v_k zweien unendlich nahen Punkten der beiden Wege angehören. Da ein ausgezeichneter Punkt nicht überschritten wird, so bleibt u_k stets um eine endliche Grösse von einem anderen Werthe, den die Function in dem nämlichen Punkte z_k haben kann, verschieden; man kann daher eine endliche Grösse p angeben, so beschaffen, dass der Modul**) der Differenz zwischen u_k und einem anderen Werthe der Function in dem nämlichen Punkte z_k an allen Stellen des Weges grösser als p bleibt. Da die Punkte, in welchen die Function die Werthe u_k und v_k besitzt, der Annahme nach unendlich nahe liegen, so kann auch der Modul der Differenz $u_k - v_k$ nur entweder unendlich klein oder grösser als p sein. Wenn daher die Werthe u_k und v_k im Punkte z von einander verschieden wären, so müsste der Modul der Differenz $u_k - v_k$ irgendwo plötzlich von einem unendlich kleinen Werthe zu einem endlichen Werthe, der grösser als p ist, überspringen. Allein da nirgends ein ausgezeichneter Punkt überschritten wird, so ist u auf seinem Wege stetig, ebenso v, also muss es auch die Differenz $u - v$ sein. Dieselbe muss daher fortwährend unendlich klein bleiben, und, wie sie im Punkte z_0 Null ist, auch im Punkte z wieder Null werden.

Es erhellt sogleich, dass dieser Beweis seine Kraft verliert, wenn die beiden Wege einen ausgezeichneten Punkt überschreiten; denn dann wird entweder die Function unstetig, oder die verschiedenen Werthe der Function in dem näm-

---

*) *Puiseux*, Recherches sur les fonctions algébriques. (*Liouville*, Journal de mathématiques. Tome XV. p. 370.)

**) Vgl. die Bemerkung auf S. 336.

Digitized by Google

lichen Punkte nähern sich einander in der Nähe des ausgezeichneten Punktes, sodass der Unterschied $u_k - v_k$ der Functionswerthe in zwei unendlich nahen Punkten der beiden Wege beliebig kleine endliche Werthe annehmen kann. Würde z. B. in der so eben betrachteten Function

$$u = c + \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$$

der Punkt $z = b$ überschritten, so würde die Function eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden; würde aber der Punkt $z = a$ überschritten, so würde der Unterschied der beiden Werthe $c + \varepsilon$ und $c - \varepsilon$, welche die Function in einem nahe an a liegenden Punkte annehmen kann, also 2ε, beliebig klein gemacht werden können, wenn man die Variable nur nahe genug an den Punkt a herangehen, d. h. den Modul von $z - a$ klein genug werden lässt.

Denkt man sich jetzt eine Reihe auf einander folgender und unendlich nahe an einander liegender Wege, alle zwischen den Punkten z_0 und z, und so beschaffen, dass nirgend ein ausgezeichneter Punkt überschritten oder von zwei Wegen eingeschlossen wird, so erhält die Function auf allen diesen Wegen den nämlichen Werth im Punkte z. Daraus folgt dann: wenn man einen Weg zwischen zwei Punkten z_0 und z so durch allmälige Uebergänge in einen anderen Weg zwischen den nämlichen Punkten umformen kann, dass dabei ein ausgezeichneter Punkt nicht überschritten wird, so erhält die Function in z auf dem zweiten Wege denselben Werth wie auf dem ersten. Fallen die Punkte z und z_0 zusammen, so dass der Weg eine geschlossene Linie bildet, so erhält die Function, wenn die Variable diese geschlossene Linie durchlaufen hat und zum zweitenmale nach z_0 kommt, in z_0 denselben Werth, den sie beim Ausgange von z_0 hatte, wenn man die geschlossene Linie durch allmälige Uebergänge auf den Punkt z_0 reduciren kann, ohne einen ausgezeichneten Punkt zu überschreiten.

Wir werden nun im nächsten § an einigen Beispielen sehen, wie der Werth einer mehrdeutigen Function sich ändert, wenn die Variable zwei Wege beschreibt, die nur mit Ueberschreitung eines ausgezeichneten Punktes in einander umgeformt werden können.

Digitized by Google

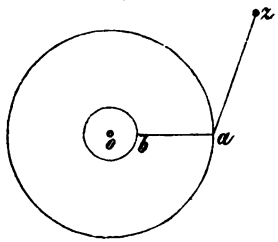
§ 84.

Betrachten wir als erstes Beispiel die Function

$$u = \sqrt{z};$$

dieselbe besitzt einen ausgezeichneten Punkt $z = 0$; in diesem werden die beiden im Allgemeinen von einander verschiedenen Werthe $+\sqrt{z}$ und $-\sqrt{z}$ einander gleich, nämlich beide gleich 0. Nehmen wir an, die Veränderliche z gehe von dem Punkte $z = 1$ (a, Fig. 21) aus und durchlaufe die Peripherie eines um den Nullpunkt als Mittelpunkt beschriebenen Kreises; dann kann diese geschlossene Linie nicht auf den Punkt $z = 1$ reducirt werden, ohne dass dabei der ausgezeichnete Punkt $z = 0$ überschritten wird. Geht nun die Function $u = \sqrt{z}$ von dem Punkte $z = 1$ mit dem Werthe $u = +1$ aus, und setzt man

Fig. 21.



$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so ist zuerst im Punkte $z = 1$, $r = 1$ und $\varphi = 0$; durchläuft dann z die Peripherie des Kreises in positiver Richtung, d. h. in der Richtung, in welcher der Winkel φ wächst, so bleibt r constant $= 1$, und φ nimmt von 0 bis 2π zu. Kommt also die Veränderliche wieder nach dem Punkte $z = 1$ zurück, so ist jetzt

$$z = \cos 2\pi + i\sin 2\pi,$$

und folglich

$$u = \sqrt{z} = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$$

die Function hat also jetzt im Punkte $z = 1$ nicht wieder den ursprünglichen Werth $+1$, sondern den anderen Werth -1 erhalten. Lässt man nun die Variable statt des Kreises irgend eine andere geschlossene, den Nullpunkt umgehende Linie vom Punkte $z = 1$ aus beschreiben, so kann diese Linie durch allmälige Aenderungen in den Kreis übergeführt werden, ohne dass dabei der Nullpunkt überschritten wird. Wenn also die Variable auf dieser Linie zum Punkte $z = 1$ zurückkehrt, so erhält die Function ebenfalls den Werth -1. Dies lässt

Digitized by Google

sich auch direct einsehen, denn es ändert sich dabei nichts, als dass der Radius Vector r nicht mehr constant ist; derselbe kommt aber, nachdem er eine Reihe von Werthen durchlaufen hat, im Punkte $z = 1$ wieder mit dem Werthe 1 an, und die Veränderung des Winkels φ ist die nämliche, wie bei dem Kreise.

Es gehe jetzt die Variable von dem Punkte $z = 1$, der in Fig. 21 durch a dargestellt ist, in einer geraden Linie nach einem beliebigen Punkte z; die Function $u = \sqrt{z}$, aus dem Punkte a mit dem Werthe $u = +1$ ausgehend, erlange auf diesem Wege in z den Werth U. Nun kann jeder von a nach z führende Weg, welcher den Nullpunkt nicht umwindet, in die gerade Linie az übergeführt werden, ohne dass dabei der Nullpunkt überschritten wird. Also erlangt auf jedem solchen Wege die Function u in z den Werth U. Lässt man dagegen die Variable zuerst eine geschlossene Linie um den Nullpunkt herum beschreiben, dann nach a zurückkehren und jetzt erst von a nach z in gerader Linie gehen, so hat die Function $\sqrt{z}$ bei der Rückkehr nach a den Werth -1 erhalten, sie geht also nun von a mit dem Werthe -1 aus und erlangt demzufolge in z den Werth $-U$. In den soeben beschriebenen Weg lässt sich nur ohne Ueberschreitung des Nullpunktes jeder Weg umformen, welcher den Nullpunkt einmal umwindet. Auf jedem solchen Wege erlangt also die Function im Punkte z den Werth $-U$. Auch dies kann man direct einsehen, wenn man bedenkt, dass der Winkel φ bei einer Umwindung des Nullpunktes in positiver Richtung den Werth $\theta + 2\pi$ annimmt, wenn mit θ der Werth von φ bezeichnet wird, den dieser Winkel auf der geraden Linie in z erreicht. Fragen wir uns nun noch, was aus der Function wird, wenn die von a ausgehende und den Nullpunkt umgebende geschlossene Linie zweimal durchlaufen wird, so ist die Antwort leicht. Nimmt man statt der beliebigen Linie wieder den Kreis mit dem Halbmesser 1, und lässt man die Variable die Peripherie desselben zweimal hinter einander durchlaufen, so hat man schliesslich

$$z = \cos 4\pi + i \sin 4\pi,$$

also

$$u = \sqrt{z} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = +1;$$

Digitized by Google

die Function erreicht also dann wieder den ursprünglichen Werth. Hieraus geht nun hervor, dass es, übereinstimmend mit der bekannten Zweideutigkeit der Function $\sqrt{z}$, überhaupt nur zwei Klassen von Wegen giebt, auf welchen diese Function, von einem Punkte a mit einem bestimmten Werthe ausgehend, in einem anderen Punkte z verschiedene Werthe erhält. Als Repräsentant der einen Klasse kann die von a nach z führende gerade Linie angesehen werden; als Repräsentant der anderen Klasse hingegen dieselbe Gerade, welcher jedoch irgend eine, von a aus den Nullpunkt umgebende, geschlossene Linie vorangeht. Wie diese geschlossene Linie beschaffen ist, ist gleichgültig, man könnte dazu den oben erwähnten Kreis nehmen; zweckmässiger aber, besonders der späteren Betrachtungen wegen, ist der schon auf S. 338 beschriebene Weg, bei welchem man die Variable von a in gerader Linie bis zu einem nahe an dem ausgezeichneten Nullpunkte liegenden Punkte b gehen, dann einen ganzen Kreis um den Nullpunkt beschreiben und endlich von b nach a auf derselben geraden Linie zurückkehren lässt. Dass auch auf diesem Wege die Function $\sqrt{z}$ das Zeichen wechselt, folgt sogleich daraus, dass dieser Weg, ohne den Nullpunkt zu überschreiten, in den Kreis mit dem Halbmesser 1 umgeformt werden kann; es ist aber leicht direct nachzuweisen. Setzt man nämlich wieder

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

und bezeichnet mit ϱ den Halbmesser des kleinen Kreises, so ist zuerst φ constant $= 0$, und r nimmt von 1 bis ϱ ab; bei der ersten Ankunft in b hat also z den Werth $\varrho(\cos 0 + i\sin 0)$, den entsprechenden Werth von $\sqrt{z}$ wollen wir mit $\varrho^{\frac{1}{2}}$ bezeichnen. Nun bleibt r constant $= \varrho$, und φ geht von 0 bis 2π; demnach ist bei der zweiten Ankunft in b

$$z = \varrho(\cos 2\pi + i\sin 2\pi),$$

also

$$u = \sqrt{z} = \varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\varrho^{\frac{1}{2}}.$$

In dem noch übrigen Theile des Weges bleibt φ constant $= 2\pi$, und r nimmt von ϱ bis 1 zu, daher kommt u mit dem Werthe -1 in a an. Wichtig ist es dabei, zu bemer-

Digitized by Google

ken, dass der Radius ϱ des um den ausgezeichneten Punkt beschriebenen Kreises beliebig klein genommen werden kann. Ja, es steht nichts im Wege, ihn bis ins Unendliche abnehmen zu lassen. In diesem Falle soll der soeben beschriebene Weg nach *Puiseux**) eine Elementarcontur (*contour élémentaire*) genannt werden**).

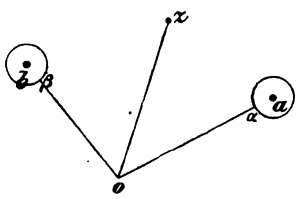
Zweites Beispiel. Die Function

$$u = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}},$$

in welcher a und b zwei complexe Constanten bedeuten, hat zwei ausgezeichnete Punkte (Fig. 25), nämlich

$$z = a \text{ und } z = b.$$

Fig. 25.



Wir nehmen an, die Function gehe von dem Punkte $z = 0$ mit dem Werthe $u = +\sqrt{\frac{a}{b}}$ aus, lassen zuerst die Variable die Elementarcontur um den Punkt a durchlaufen und untersuchen, welchen Werth die Function bei der Rückkunft nach o erhält. Zu diesem Zwecke setze man

$$z - a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

dadurch wird der Anfangspunkt in den Punkt a verlegt, die feste Richtung aber, von welcher die Winkel φ gezählt werden, bleibt ungeändert. Es sei φ_0 der Werth des Winkels φ in dem Endpunkte α des geradlinigen Theiles der Elementarcontur, der Radius des kleinen Kreises $= \varrho$, dann ist im Punkte α

$$z - a = \varrho(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0),$$

und daher der entsprechende Werth von u, welcher mit u_0 bezeichnet werden möge,

$$u_0 = \frac{\varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}\varphi_0 + i\sin\frac{1}{2}\varphi_0)}{[a-b+\varrho(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)]^{\frac{1}{2}}}.$$

---

*) *Puiseux*, Recherches sur les fonctions algébriques. (*Liouville*, Journ. de math. T. XV. p. 411.)

**) *Clebsch* und *Gordan* (Theorie der Abel'schen Functionen) nennen einen solchen geschlossenen Weg sehr passend eine Schleife. p. 82.

Digitized by Google

Wird nun der kleine Kreis von der Veränderlichen durchlaufen, so erhält diese bei der Rückkehr nach α den Werth

$$z = a + \varrho\,[\cos(\varphi_0 + 2\pi) + i\sin(\varphi_0 + 2\pi)];$$

die Function aber wird

$$\begin{aligned} u &= \frac{\varrho^{\frac{1}{2}}\,[\cos(\frac{1}{2}\varphi_0 + \pi) + i\sin(\frac{1}{2}\varphi_0 + \pi)]}{\{a - b + \varrho\,[\cos(\varphi_0 + 2\pi) + i\sin(\varphi_0 + 2\pi)]\}^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{\varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}\varphi_0 + i\sin\frac{1}{2}\varphi_0)}{[a - b + \varrho(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)]^{\frac{1}{2}}} \\ &= -u_0; \end{aligned}$$

sie wechselt also das Zeichen. Geht dann die Variable von α nach o zurück, so behält die Function das geänderte Zeichen bei und kommt in dem Punkte o mit dem Werthe $-\sqrt{\frac{a}{b}}$ an.

Ebenso verhält sich die Function bei der zweiten Elementarcontur um den Punkt b. Setzt man, um dies zu untersuchen,

$$z - b = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

und bezeichnet mit φ_0 und u_0 die Werthe, welche φ und u in dem Endpunkte β des geradlinigen Theiles der Elementarcontur auf dieser geraden Linie erhalten, sowie den Radius des kleinen Kreises mit ϱ, so ist

$$u_0 = \frac{[b - a + \varrho(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)]^{\frac{1}{2}}}{\varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}\varphi_0 + i\sin\frac{1}{2}\varphi_0)}.$$

Nachdem aber der kleine Kreis beschrieben worden ist, der Winkel φ also um 2π zugenommen hat, erlangt die Function in β den Werth

$$u = -\frac{[b - a + \varrho(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)]^{\frac{1}{2}}}{\varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}\varphi_0 + i\sin\frac{1}{2}\varphi_0)} = -u_0;$$

die Function wechselt also auch bei dieser Elementarcontur das Zeichen.

Wird die nämliche Elementarcontur zweimal hinter einander von der Variablen durchlaufen, so wechselt die Function zweimal das Zeichen, erhält also den ursprünglichen Werth wieder. Dasselbe tritt aber auch ein, wenn beide Elementarconturen, eine nach der anderen, durchlaufen werden; auch

Digitized by Google

dann kommt die Function mit dem ursprünglichen Werthe nach o zurück.

Betrachten wir nun alle möglichen Wege, welche von dem Punkte o nach einem beliebigen Punkte z führen, so können alle diejenigen, welche keinen der ausgezeichneten Punkte umwinden, auf die gerade Linie oz reducirt werden; auf diesen erhält also die Function in z den nämlichen Werth, wie auf der geraden Linie, welcher Werth, wie oben, mit U bezeichnet werden möge. Alle Wege ferner, welche nur einen der beiden ausgezeichneten Punkte umwinden, können in die betreffende Elementarcontur mit darauf folgender gerader Linie oz übergeführt werden, ohne dass ein ausgezeichneter Punkt überschritten wird. Auf allen diesen Wegen erhält daher die Function in z den Werth $-U$. Endlich können alle Wege, welche beide ausgezeichnete Punkte zugleich umwinden, durch den Weg ersetzt werden, welcher entsteht, wenn man der geraden Linie oz beide Elementarconturen, eine nach der anderen, vorangehen lässt. Da die Function hiebei zweimal das Zeichen wechselt, so erlangt sie auf allen diesen Wegen in z den Werth $+U$.

Es giebt bei der vorliegenden Function also ebenfalls nur zwei Klassen von Wegen, auf denen dieselbe in dem nämlichen Punkte verschiedene Werthe erhält. Die eine Klasse wird durch die gerade Linie repräsentirt; die andere aber erhält man, wenn man der geraden Linie eine der beiden Elementarconturen vorangehen lässt.

Die vorigen Beispiele erläutern, wie eine Quadratwurzel jedesmal ihr Zeichen wechselt, wenn die Variable um einen Punkt, in welchem die Wurzelgrösse entweder Null oder unendlich wird, eine geschlossene Linie, oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine Elementarcontur beschreibt. Die letztere ist besonders auch darum vorzuziehen, weil der Radius des kleinen Kreises immer so klein genommen werden kann, dass nur ein einziger der ausgezeichneten Punkte umschlossen wird. — Betrachten wir nun noch einige transcendente Functionen.

Drittes Beispiel. Die Function

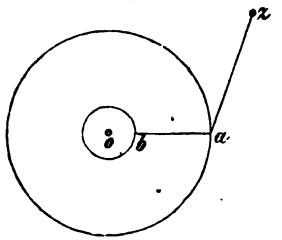
$$u = \log z$$

wird für $z = 0$ unendlich, daher ist der Nullpunkt für sie

Digitized by Google

ein ausgezeichneter Punkt. Man gehe von dem Punkte $z = 1$ (a in Fig. 21) mit dem Werthe $u = 0$ aus und lasse die Variable z einen Kreis mit dem Radius 1 um den Nullpunkt durchlaufen. Setzt man

Fig. 21.



$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi},$$

so ist

$$u = \log r + i\varphi,$$

wo $\log r$ den reellen Logarithmus des immer positiven Radius Vector bedeutet. Wenn nun die Variable die Peripherie des Kreises in positiver Richtung durchläuft und wieder nach a zurückkommt, so ist constant $\log r = \log 1 = 0$, aber φ ist von 0 bis 2π gewachsen; daher erhält die Function den Werth

$$2\pi i.$$

Durchläuft aber die Variable den Kreis in negativer Richtung, so hat φ von 0 bis -2π abgenommen und dann erhält die Function in a den Werth

$$-2\pi i.$$

Dieselben Werthe erhält die Function auch, wenn die Elementarcontur um den Nullpunkt in positiver oder negativer Richtung durchlaufen wird. Lässt man nun die Variable den Kreis (oder die Elementarcontur) zweimal nach einander in positiver oder negativer Richtung durchlaufen, so erhält φ den Werth $\pm 4\pi$, und daher die Function den Werth $\pm 4\pi i$. Nach n-maliger Umkreisung des Nullpunkts in positiver Richtung und m-maliger Umkreisung in negativer Richtung erhält ebenso die Function im Punkte a den Werth

$$2(n - m)\pi i.$$

Bezeichnet man also jetzt mit n eine positive oder negative ganze Zahl oder auch Null, so kann die Function im Punkte a unendlich viele Werthe annehmen, die in der Formel

$$2n\pi i$$

enthalten sind. Daraus folgt dann sogleich, dass die Function auch in einem beliebigen Punkte z unendlich viele Werthe erhält, welche durch

$$(\log z) + 2n\pi i$$

Digitized by Google

bezeichnet werden können, wenn $(\log z)$ denjenigen Werth bedeutet, den die Function, von dem Punkte $z = 1$ mit dem Werthe $u = 0$ ausgehend, im Punkte z auf der geraden Linie az erhält. Alle Wege, welche von a nach z führen, können hier entweder auf die gerade Linie az reducirt werden, oder man kann sie dadurch ersetzen, dass man die Elementarcontur, beliebig oft und in beliebigen Richtungen durchlaufen, der geraden Linie vorangehen lässt. Man sieht, auch hier ist die Uebereinstimmung mit der bekannten Vieldeutigkeit des Logarithmus vollständig vorhanden.

Viertes Beispiel.

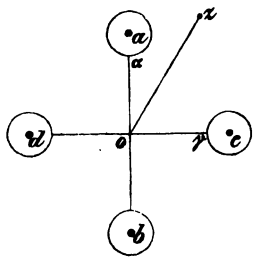
$$u = \text{arc tg } z.$$

Die Untersuchung dieser Function lässt sich auf das vorige Beispiel zurückführen, wenn man den Arcus Tangens in einen Logarithmus verwandelt. Man hat bekanntlich

$$u = \text{arc tg } z = \frac{1}{2i} \log \frac{i - z}{i + z}$$
$$= \frac{1}{2i} \log (i - z) - \frac{1}{2i} \log (i + z),$$

und diese Form zeigt, dass die Function arc tg z zwei ausgezeichnete Punkte hat, nämlich $z = +i$ und $z = -i$. Diese Punkte liegen auf der Ordinatenaxe zu beiden Seiten des Nullpunkts in der Entfernung 1 von dem letzteren (a und b Fig 26). Dabei bemerke man aber, dass die Function $\log (i - z)$ nur den einen Punkt $z = +i$, und die Function $\log (i + z)$ nur den andern Punkt $z = -i$ zum ausgezeichneten Punkte hat. Wir lassen nun die Function arc tg z von dem Punkte $z = 0$ mit dem Werthe $u = 0$ ausgehen und bezeichnen den gemeinschaftlichen Werth, mit welchem die Functionen $\log (i - z)$ und $\log (i + z)$ den Nullpunkt verlassen, durch u_1. Durchläuft dann die Variable zuerst die Elementarcontur um den Punkt $+i$, (a), in positiver Richtung, so erhält, wenn z zum Nullpunkte zurückgekehrt ist, die Function $\log (i - z)$ den Werth $u_1 + 2\pi i$ (wie entweder aus dem vorigen Beispiele oder auch durch

Fig. 26



Digitized by Google

directe Betrachtung mittelst der Substitution $i - z = re^{i\varphi}$ leicht erhellt); die Function $\log(i + z)$ aber bleibt ungeändert gleich u_1, weil der umwundene Punkt $+ i$ für sie kein ausgezeichneter Punkt ist; demnach bekommt die Function arc tg z den Werth

$$u = \frac{1}{2i}(u_1 + 2\pi i) - \frac{1}{2i} u_1 = \pi.$$

Wird ebenso die andere Elementarcontur um den Punkt $- i$, (b) in positiver Richtung von der Variablen durchlaufen, so erhält die Function $\log(i - z)$ wieder den ursprünglichen Werth u_1, weil diese Function nur den Punkt $+ i$ zum ausgezeichneten Punkte hat, die andere Function $\log(i + z)$ dagegen erhält den Werth $u_1 + 2\pi i$; mithin wird die Function arc tg z oder

$$u = \frac{1}{2i} u_1 - \frac{1}{2i}(u_1 + 2\pi i) = - \pi.$$

Eine mehrfach wiederholte Umkreisung einer Elementarcontur vervielfacht den Werth $\pm \pi$, eine Umkreisung in entgegengesetzter Richtung giebt ihm das entgegengesetzte Zeichen; also enthält überhaupt die Formel

$$n\pi,$$

in welcher n eine positive oder negative ganze Zahl oder Null bedeutet, alle Werthe, welche die Function arc tg z im Nullpunkte erhält, wenn die Variable die beiden Elementarconturen, jede beliebig oft und in beliebigen Richtungen, durchläuft.

Bezeichnet man nun mit (arc tg z) den Werth, den die Function in einem beliebigen Punkte z annimmt, wenn die Variable in gerader Linie von o nach z geht, so werden alle Werthe des Arcus Tangens im Puncte z durch den bekannten vollständigen Werth dieser vieldeutigen Function

$$(\text{arc tg } z) + n\pi$$

ausgedrückt, denn alle von o nach z führenden Wege reduciren sich entweder auf die gerade Linie oz oder lassen sich dadurch ersetzen, dass vor der geraden Linie eine der beiden Elementarconturen oder beide, ein oder mehrere Male, in positiver oder negativer Richtung, durchlaufen werden.

Die behandelten Beispiele zeigen, dass eine vieldeutige Function alsdann verschiedene Werthe für denselben Werth der Variabeln annehmen kann, wenn die letztere verschiedene

Digitized by Google

Wege durchläuft, die gewisse ausgezeichnete Punkte einschliessen. Wenn nun diese Punkte unserer Voraussetzung gemäss discrete, in endlichen Entfernungen von einander befindliche, Punkte sind, so kann man immer gewisse Theile der Ebene abgrenzen, innerhalb welcher ein Umwinden eines solchen Punktes nicht möglich ist; innerhalb eines solchen Theiles bleibt also auch eine im Allgemeinen vieldeutige Function einwerthig, da die Variable solche zwei Wege, auf denen die Function in dem nämlichen Punkte zwei verschiedene Werthe erhalten würde, nicht beschreiben kann. Ist ein solcher Theil der Ebene abgegrenzt, was immer leicht geschehen kann, so nennt *Cauchy**) die Function monodrom in diesem Theile der Ebene. So ist z. B. die Function Arcus Tangens monodrom innerhalb eines Kreises, der mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschrieben ist, oder zwischen zweien, durch die Punkte $+i$ und $-i$ der Abscissenaxe parallel gezogenen, geraden Linien**). Eine eindeutige Function ist daher in der ganzen Ausdehnung der Ebene monodrom. Beschreibt die Variable z eine geschlossene Linie, und erhält eine Function $f(z)$, wenn die Variable, von einem beliebigen Punkte dieser Linie ausgehend, wieder zu demselben Punkte zurückkehrt, den nämlichen Werth wie beim Ausgange, so wollen wir sagen, die Function $f(z)$ sei monodrom auf dieser geschlossenen Linie.

Wenn eine Function der complexen Variabeln z in *Riemann*'s Sinne, oder nach *Cauchy*'s Benennung eine monogene Function, in einem gewissen Theile der Ebene (welcher auch die ganze unendliche Ebene umfassen kann) monodrom und zugleich überall in diesem Theile der Ebene endlich und stetig ist, so soll sie nach *Cauchy****) eine in diesem Theile der Ebene synektische Function genannt werden. Die Function $\sin z$ ist z. B. synektisch in der ganzen Ausdehnung

---

*) *Cauchy*, Exercices d'analyse et de physique mathématique. Tom. IV. p. 325.

**) Man kann auch die Abgrenzung dadurch herbeiführen, dass man von jedem ausgezeichneten Punkte eine gerade Linie ausgehen lässt, und der Variablen nicht gestattet, diese Linie zu überschreiten.

***) *Cauchy*, Sur les rapports différentiels des quantités géométriques et sur les intégrales synectiques des équations différentielles. (Comptes rendus. 1855. Tome 40. p. 447.)

Digitized by Google

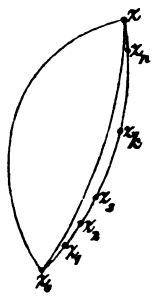
der Ebene, die Function tg z ist dagegen synektisch in einem mit dem Radius $\frac{\pi}{2}$ um den Nullpunkt beschriebenen Kreise, denn für $z = \frac{\pi}{2}$ wird sie unendlich.

§ 85*).

Das bestimmte Integral von einer Function einer complexen Variablen lässt sich genau in derselben Weise definiren, wie das bestimmte Integral einer reellen Function.

Es seien z_0 und z irgend zwei complexe Werthe der Variablen z. Man denke sich die Punkte, welche diese beiden Werthe repräsentiren, durch eine beliebige ununterbrochene Linie verbunden (Fig. 24) und nehme auf derselben eine Reihe eingeschalteter Punkte an, welche den Werthen $z_1, z_2, \cdots z_n$ der Variabeln entsprechen. Ist ferner $f(z)$ eine gegebene Function von z, und bildet man die Summe der Producte

Fig. 24.



$$f(z_0)(z_1-z_0)+f(z_1)(z_2-z_1)+\cdots+f(z_n)(z-z_n),$$

so ist der Grenzwerth derselben, wenn die Anzahl der zwischen z_0 und z längs der beliebigen Linie eingeschalteten Werthe bis ins Unendliche zunimmt, die Differenzen $z_1 - z_0$, $z_2 - z_1$, etc., also bis ins Unendliche abnehmen, das bestimmte Integral zwischen den Grenzen z_0 und z, also:

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \lim\left[f(z_0)(z_1-z_0)+f(z_1)(z_2-z_1)+\cdots+f(z_n)(z-z_n)\right].$$

Dabei muss im Allgemeinen**), damit die Summe der Producte

---

*) Vgl. hiezu:

Cauchy, Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée. (Comptes rendus. 1846. Tome 23. p. 251.)

Cauchy, Considérations nouvelles sur les intégrales définies, qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée et sur celles, qui sont prises entre des limites imaginaires. (Comptes rendus. 1846. Tome 23. p. 689.)

Puiseux, Recherches sur les fonctions algébriques (*Liouville*, Journ. de math. Tome 15. p. 365).

**) Setzt man $f(z)\,dz = dF(z)$, so behält das Integral auch in dem Falle einer Stetigkeitsunterbrechung von $f(z)$ seinen Sinn, wenn nur $F(z)$ stetig bleibt.

Digitized by Google

sich wirklich einem bestimmten Grenzwerthe nähere, die Function $f(z)$ in allen Punkten der ununterbrochenen Linie einen endlichen Werth besitzen und in keinem eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden.

Man sieht, dass diese Definition von der gewöhnlichen Definition eines bestimmten Integrals bei reellen Variablen in nichts Wesentlichem verschieden ist. Ein Unterschied besteht allerdings darin, dass, wie es die Natur einer complexen Veränderlichen erfordert, der Weg, den dieselbe zwischen zwei Werthen z_0 und z durchläuft, kein vorgeschriebener ist, sondern jede beliebige ununterbrochene Linie sein kann. Ein zweiter Unterschied besteht darin, dass man bei reellen Variabeln die Differenzen je zweier auf einander folgender Werthe gleich annehmen darf. Dies ist bei complexen Werthen der Variablen nicht immer erlaubt, denn da die Differenzen $z_1 - z_0$, $z_2 - z_1$, etc. die geraden Linien $z_0 z_1$, $z_1 z_2$, etc. ihrer Länge und Richtung nach darstellen, so würde die Annahme der Gleichheit dieser Differenzen zugleich voraussetzen, dass der von der Variablen durchlaufene Weg die von z_0 nach z führende gerade Linie sei. Es ist aber, wie wir schon im vorigen § gesehen haben, von der höchsten Wichtigkeit, den Weg, welchen die Variable durchläuft, nicht näher zu bestimmen, sondern derselben alle Wege offen zu erhalten. Es ist auch aus der Lehre der reellen bestimmten Integrale bekannt, dass die Annahme der Gleichheit der Differenzen durchaus nicht wesentlich ist. Man kann daher folgende von reellen Integralen geltende Sätze unmittelbar auf complexe Integrale übertragen:

1) Bedeutet z_k irgend einen der von der Variablen durchlaufenen Werthe, so ist

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_k} f(z)\,dz + \int_{z_k}^{z} f(z)\,dz.$$

2) Es ist

$$\int_{z}^{z_0} f(z)\,dz = -\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

d. h. durchläuft die Variable die Linie, welche die stetige Aufeinanderfolge ihrer Werthe darstellt, in umgekehrter

Digitized by Google

Richtung, so erhält das Integral den entgegengesetzten Werth.

Ehe wir nun zu einer näheren Untersuchung des Einflusses übergehen, den der von der Variablen durchlaufene Weg auf den Werth des Integrals hat, schicken wir die folgende Betrachtung voran:

Es seien P und Q zwei reelle Functionen von zwei Variablen x und y von der Beschaffenheit, dass sie für alle Werthe dieser Variablen, welche, als rechtwinklige Coordinaten angesehen, den Punkten einer von einer geschlossenen Linie begrenzten ebenen Fläche angehören, endlich, stetig und eindeutig sind. Dies vorausgesetzt, kann man das Doppelintegral

$$J = \int\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

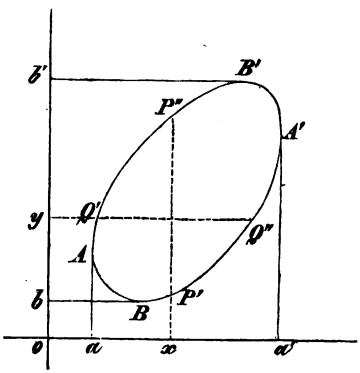
genommen in Bezug auf den ganzen, von der geschlossenen Linie begrenzten Theil der Ebene, in ein einfaches Integral verwandeln, welches sich nur auf solche Werthe von x und y erstreckt, deren zugehörige Punkte auf der Peripherie der geschlossenen Linie liegen.

Schreibt man das Integral J in der Form

$$J = \int\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy - \int\int \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = J_1 - J_2,$$

so kann man im ersten Theile die Integration nach x, im zweiten Theile die nach y ausführen. Zieht man nämlich die zu einer beliebigen Ordinate y zugehörige Abscisse, welche die geschlossene Linie zweimal durchschneidet (Fig. 27), und bezeichnet die den Durchschnittspunkten zugehörigen Werthe der Function Q mit Q' und Q'', so hat man, da die Function Q innerhalb der Linie endlich, stetig und eindeutig vorausgesetzt wird,

Fig. 27.



$$J_1 = \int\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int Q''\, dy - \int Q'\, dy.$$

Digitized by Google

In diesen Integralen geht y von der ersten, äussersten Ordinate b bis zur letzten b'. In dem ersten Integrale hat man daher für Q'' alle Werthe der Function Q einzusetzen, welche dieselbe nach und nach in den Punkten der Linie $BQ''B'$ annimmt. Ebenso hat man in dem zweiten Integrale für Q' alle diejenigen Werthe der Function Q einzusetzen, welche diese nach und nach in den Punkten der Linie $BQ'B'$ annimmt. Lässt man aber in dem zweiten Integrale die Ordinate y in umgekehrter Richtung von b' nach b gehen, so kehrt das zweite Integral sein Zeichen um, zugleich wird der Theil $BQ'B'$ der geschlossenen Linie ebenfalls in umgekehrter Richtung, nämlich von B' über Q' nach B, durchlaufen und bildet mit dem ersten Theile $BQ''B'$ zusammen die ganze geschlossene Linie. Demnach erhält man

$$\int\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int Q\, dy,$$

dieses Integral längs der ganzen geschlossenen Linie genommen; d. h. es sind für Q alle diejenigen Werthe dieser Function zu setzen, die dieselbe in den Punkten der geschlossenen Linie $BQ''B'Q'B$ hat.

Ebenso kann man nun auch das zweite Integral

$$J_2 = \int\int \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$

behandeln. Bezeichnen P' und P'' die Werthe, welche die Function P in den beiden Durchschnittspunkten einer zu einem beliebigen Werthe von x zugehörigen Ordinate erhält, so ist

$$J_2 = \int\int \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int P''\, dx - \int P'\, dx.$$

Hier geht x von a bis a', das erste Integral ist also längs der Linie $AP''A'$, das zweite längs der Linie $AP'A'$ zu nehmen. Kehrt man aber in dem letzteren wieder das Zeichen um, so vereinigen sich beide Integrale zu einem einzigen, $\int P\, dx$, welches auf die ganze geschlossene Linie $AP''A'P'A$ auszudehnen ist. Allein, wie man sieht, ist jetzt die Integration in $\int P\, dx$ in umgekehrter Richtnng zu nehmen wie früher in $\int Q\, dy$. Will man daher bei beiden Integralen die Richtung die nämliche sein lassen, so muss man setzen

$$-\int\int \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int P\, dx,$$

Digitized by Google

und erhält alsdann schliesslich

$$\int\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int(P\,dx+Q\,dy).$$

Man kann also ein in Bezug auf eine von einer geschlossenen Linie begrenzte ebene Fläche genommenes Integral in ein längs der geschlossenen Linie genommenes, und umgekehrt, verwandeln.

Es sei nun wie früher

$$u=f(z)=X+iY$$

eine Function der complexen Variablen

$$z=x+iy.$$

Wir betrachten das Integral $\int f(z)\,dz$, bei welchem die Variable z eine geschlossene Linie beschreibe, und nehmen an, dass die Function $f(z)$ innerhalb dieser geschlossenen Linie überall synektisch sei, d. h. dass sie in allen Punkten im Innern und auf der Peripherie der geschlossenen Linie endlich und stetig bleibe, und dass sie denselben Werth wieder erhalte, wenn die Variable die geschlossene Linie beschrieben hat. Dann ist

$$\begin{aligned}\int f(z)\,dz&=\int(X+iY)(dx+i\,dy)\\&=\int(X\,dx-Y\,dy)+i\int(Y\,dx+X\,dy).\end{aligned}$$

Nach dem eben bewiesenen Satze lassen sich diese beiden Integrale in Doppelintegrale verwandeln, sodass man erhält

$$\int f(z)\,dz=-\int\int\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\,dy+i\int\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Wenn nun aber $X+iY$ eine Funtion von z ist, so müssen nach § 82 (2) die Bedingungen

$$\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}=0,\quad\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}=0$$

erfüllt sein; folglich sind beide Doppelintegrale Null, und daher auch

$$\int f(z)\,dz=0.$$

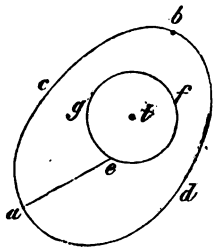
Wir haben hiermit folgenden Satz gewonnen:

Satz I. Das Integral von einer Function einer complexen Veränderlichen, längs einer geschlossenen Linie genommen, hat stets den Werth Null, wenn die Function innerhalb dieser Linie überall synektisch ist.

Digitized by Google

Hieraus geht sofort das Verhalten der Werthe eines Integrals hervor, wenn man die Variable zwei verschiedene, aber zwischen denselben zwei Punkten enthaltene, Wege durchlaufen lässt. Des präciseren Ausdrucks halber möge dabei folgende Bezeichnung angewendet werden: Wenn die Variable z den Weg acb (Fig. 28) durchläuft, so soll das Integral

Fig. 28.



$$\int_a^b f(z)\,dz \quad \text{mit} \quad J(acb)$$

bezeichnet werden. Es seien nun acb und adb zwei von a nach b führende Wege, so beschaffen, dass innerhalb der dadurch begrenzten Fläche die Function $f(z)$ überall synektisch sei; dann ist nach dem vorigen Satze

$$J(adbca) = 0.$$

Weil aber

$$J(adbca) = J(adb) + J(bca),$$

und

$$J(bca) = -J(acb)$$

ist, so ist

$$J(acb) = J(adb);$$

d. h. Satz II. Wenn in einem bestimmten Integral die Variable beim Uebergang von der unteren zur oberen Grenze zwei verschiedene Wege durchläuft, so erhält das Integral auf beiden Wegen denselben Werth, wenn die Function innerhalb der von den beiden Wegen eingeschlossenen Fläche überall synektisch ist.

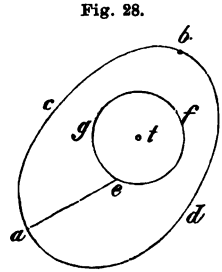
Man kann die Bedingung, unter welcher dieser Satz gilt, auch dadurch ausdrücken, dass man sagt, der von den beiden Wegen eingeschlossene Theil der Ebene darf keinen ausgezeichneten Punkt der Function enthalten; denn wenn dies nicht der Fall ist, so ist die Function in jenem Theile der Ebene synektisch. Zu bemerken ist ferner, dass der gemeinschaftliche Anfangs- und Endpunkt der beiden Wege auch zusammenfallen können, sodass beide Wege geschlossene Linien bilden, die jedoch den Ausgangspunkt gemeinsam

Digitized by Google

haben; der Satz bleibt dann immer noch richtig, wenn nur in dem zwischen den beiden Wegen liegenden Flächenstücke sich keine ausgezeichneten Punkte befinden, wie auch übrigens die Function beschaffen sein mag.

Nehmen wir wieder an, die Variable z durchlaufe eine geschlossene Linie $adbca$ (Fig. 28), und die Function $f(z)$ sei monodrom auf derselben, aber es befinden sich in deren Innern ein oder mehrere Punkte t, in welchen die Function unendlich wird, so kann man nicht mehr behaupten, dass das längs der geschlossenen Linie genommene Integral gleich Null ist; wir werden vielmehr weiter unten sehen, wie wir unter gewissen Voraussetzungen den Werth desselben ermitteln können. Lässt man nun aber die Variable z eine andere geschlossene Linie $efge$, welche den oder die Punkte t ebenfalls umgiebt, in der nämlichen Richtung durchlaufen, und ist die Function $f(z)$ innerhalb des von den beiden geschlossenen Linien begrenzten Raumes überall endlich und stetig und ausserdem auch auf der zweiten Linie $efge$ monodrom, so hat das Integral längs der Linie $adbca$ denselben Werth, wie längs der Linie $efge$. Denn verbindet man einen Punkt e der einen Linie mit einem beliebigen Punkte a der anderen so, dass die Verbindungslinie den von der Linie $efge$ umschlossenen Raum nicht durchschneidet, so ist

Fig. 28.



$$J(aefgea) = J(adbca),$$

weil man auf diese beiden Integrale den vorigen Satz anwenden kann. Nun ist aber

$$J(aefgea) = J(ae) + J(efge) + J(ea) = J(efge),$$

denn da die Function $f(z)$ auf der Linie $efge$ monodrom ist, so hat sie beim Durchlaufen der Linie ea in dieser Richtung dieselben Anfangs- und Endwerthe, wie vorher in der Richtung ae, folglich sind die Integrale $J(ae)$ und $J(ea)$ gleich und entgegengesetzt. Demnach ist, was zu beweisen war,

$$J(efge) = J(adbca).$$

Man hat also auch folgenden Satz:

Digitized by Google

Satz III. Wenn die Variable z um einen oder mehrere Punkte herum, in welchen die Function $f(z)$ unendlich wird, zwei verschiedene geschlossene Linien durchläuft, und die Function $f(z)$ sowohl längs diesen Linien monodrom ist, als auch in dem zwischen denselben enthaltenen Raume endlich und stetig bleibt, so hat das Integral $\int f(z)\,dz$, längs beiden geschlossenen Linien genommen, denselben Werth.

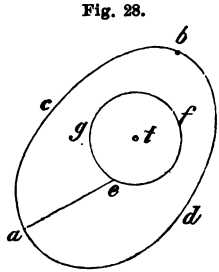
Es verdient hervorgehoben zu werden, dass dieser Satz nicht mehr gilt, wenn die Function $f(z)$ auf den geschlossenen Linien nicht monodrom ist. Wäre sie z. B. eine Quadratwurzel, welche für $z = t$ unendlich wird, wie $\frac{1}{\sqrt{z-t}}$, so würde sie, wenn die Variable zum zweiten Male nach e kommt, das Zeichen wechseln, und dann würde $J(ae) + J(ea)$ nicht gleich Null, sondern gleich $2J(ae)$ sein.

Wir gehen nun zur Bestimmung des Werthes eines Integrals

$$\int f(z)\,dz$$

über, wenn dasselbe längs einer geschlossenen Linie genommen wird, innerhalb welcher die Function $f(z)$ in einer bestimmmten Weise unendlich wird, während sie zugleich auf der geschlossenen Linie monodrom ist. Nehmen wir zuerst den Fall, dass die Function $f(z)$ nur in einem einzigen Punkte t innerhalb der geschlossenen Linie unendlich werde, so sei $adbca$ (Fig. 28) diese Linie; dann hat das Integral nach dem vorigen Satze längs jeder geschlossenen Linie, die innerhalb $adbca$ liegt und den Punkt t umschliesst, denselben Werth, wie längs $adbca$, also auch längs eines um t mit einem kleinen Radius ϱ beschriebenen Kreises. Setzt man

Fig. 28.



$$z - t = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \varrho\, e^{i\varphi},$$

so bleibt, während z die Peripherie dieses Kreises durchläuft, ϱ constant, und φ wächst von φ_0 bis $\varphi_0 + 2\pi$, wenn φ_0 den Anfangswerth von φ bezeichnet. Schreibt man ferner

$$f(z)\,dz = \frac{(z-t)\,f(z)\,dz}{z-t},$$

Digitized by Google

so erhält man, da

$$\frac{dz}{z-t} = \frac{\varrho\, e^{i\varphi}\, i\, d\varphi}{\varrho\, e^{i\varphi}} = i\, d\varphi$$

wird,

$$\int f(z)\, dz = i \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} (z - t)\, f(z)\, d\varphi.$$

Der Werth des Integrals ist nach dem vorigen Satze von der Grösse des Radius ganz unabhängig, wofern der Kreis nur ganz innerhalb der Linie $adbca$ liegt, oder wenigstens keinen zweiten ausgezeichneten Punkt umschliesst. Man kann daher den Radius ϱ auch bis ins Unendliche abnehmen lassen; dann nähert sich z dem Werthe t, $z - t$ der Null, und $f(z)$ dem Werthe $f(t)$, welcher der Annahme nach unendlich gross ist. Das Product $(z - t) f(z)$ nimmt also die Form $0 \,.\, \infty$ an und kann daher möglicher Weise einen endlichen Grenzwerth haben. Wir wollen nun diesen Fall annehmen, also voraussetzen, dass die Function $f(z)$ zwar für $z = t$ unendlich werde, zugleich aber so beschaffen sei, dass das Product $(z - t) f(z)$ sich für $z = t$ einem endlichen Grenzwerthe nähere, welcher auch von φ unabhängig sei, d. h. welcher für jede Richtung, auf welcher man sich dem Punkte t nähert, derselbe bleibe. Bezeichnet man diesen Grenzwerth mit p, setzt also

$$\lim (z - t) f(z) = p \quad (\text{für } z = t),$$

so wird nun

$$\int f(z)\, dz = ip \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} d\varphi = 2\pi i p.$$

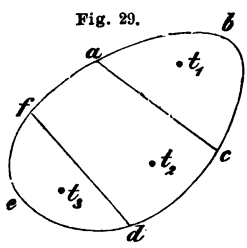
Hiedurch ist der Werth des Integrals längs der geschlossenen Linie bekannt, sobald der Grenzwerth p gefunden werden kann. Für den Fall, dass $f(t)$ nicht unendlich gross ist, ist p allemal Null, und wir kommen wieder auf den früheren Satz zurück, dass das Integral Null ist*).

*) Diesen wichtigen Satz hat *Cauchy* zuerst, wenn auch in anderer Form, in der Abhandlung „Mémoire sur les intégrales définies" (Mémoires présentés par divers savans à l'académie des sciences. Tome I. 1827) ausgesprochen, von welcher Abhandlung *Poisson* in dem „Bulletin des scienses par la société philomatique de Paris" (Année 1814. p. 185) einen Bericht gegeben hat.

Digitized by Google

Dieser Satz kann nun sogleich auf den Fall ausgedehnt werden, dass die geschlossene Linie in ihrem Innern mehrere Punkte enthält, in denen die Function unendlich wird, wenn diese Punkte nur discrete, in endlichen Entfernungen von einander befindliche sind*). Nehmen wir beispielsweise an, es seien drei solche Punkte vorhanden, t_1, t_2, t_3. Die Function $f(z)$ sei in diesen drei Punkten unendlich gross, im übrigen aber innerhalb der geschlossenen Linie synektisch, ferner mögen die Producte $(z-t_1)f(z)$, $(z-t_2)f(z)$, $(z-t_3)f(z)$ für $z=t_1$, $z=t_2$, $z=t_3$ bestimmte endliche Grenzwerthe annehmen, die resp. durch p_1, p_2, p_3 bezeichnet werden mögen. Dies vorausgesetzt, theile man die von der geschlossenen Linie begrenzte Fläche durch zwei Querlinien ac und fd (Fig. 29) so in drei Theile, dass jeder Theil nur einen der Punkte t_1, t_2, t_3 enthält. Alsdann kann man den Werth des Integrals $\int f(z)\,dz$ längs der Begrenzung eines jeden dieser Theile nach dem vorigen Satz bestimmen. Mit Anwendung der S. 366 angegebenen Bezeichnung erhält man

Fig. 29.



nämlich

(6) $J(acba)=2\pi i p_1$, $J(afdca)=2\pi i p_2$, $J(fedf)=2\pi i p_3$,

wobei die geschlossenen Linien alle in der Richtung der wachsenden φ durchlaufen werden müssen. Nun ist aber

$$J(acba)=J(ac)+J(cba)$$
$$J(afdca)=J(af)+J(fd)+J(dc)+J(ca)$$
$$J(fedf)=J(fed)+J(df),$$

folglich erhält man, da

$$J(ac)+J(ca)=0,\quad J(fd)+J(df)=0$$

ist,

$$J(acba)+J(afdca)+J(fedf)$$
$$=J(cba)+J(af)+J(fed)+J(dc)$$
$$=J(cbafedc),$$

*) Vgl. ausser den oben angegebenen Abhandlungen auch noch die folgende:

Cauchy, Mémoire sur les variations intégrales des fonctions. Comptes rendus. 1855. Tome 40. p. 651, 713 und 804.

Digitized by Google

d. h. die Summe der drei Werthe (6) ist gleich dem Integral längs der ganzen geschlossenen Linie genommen. Also ist dieses Integral

$$J\,(cbafedc) = 2\pi i\,(p_1 + p_2 + p_3).$$

§ 86.

Die im vorigen Paragraphen angestellten Betrachtungen deuten darauf hin, dass der Werth eines complexen Integrals, sobald die unter dem Integralzeichen stehende Function nicht überall synektisch ist, wesentlich von dem Integrationswege abhängig sein wird. Wenn dies aber der Fall ist, so kann ein bestimmtes Integral, dessen obere Grenze veränderlich ist, für einen und denselben Werth dieser oberen Grenze, je nachdem die Variable, von der constanten unteren Grenze ausgehend, diesen oder jenen Weg durchläuft, andere und andere Werthe erhalten, und daher eine mehrdeutige Function der oberen Grenze darstellen. *Puiseux* hat in der schon mehrere Male citirten Abhandlung gezeigt*), dass alle Integrationswege auf gerade Linien und Elementarconturen zurückgeführt werden können, und es dadurch möglich gemacht, dass man alle Werthe, welche ein bestimmtes Integral annimmt, wenn alle möglichen Integrationswege berücksichtigt werden, wirklich angeben kann. Dieses soll nun an einigen Beispielen näher erläutert werden.

Erstes Beispiel.

Wir beginnen mit dem Integral

$$\int \frac{dz}{z}.$$

Die Function $\frac{1}{z}$ ist zwar in der ganzen Ebene monodrom, aber sie wird unendlich für $z = 0$. Der Nullpunkt ist daher ein ausgezeichneter Punkt, und wir können nach dem vorigen Paragraphen den Werth des Integrals bestimmen, wenn es längs einer, den Nullpunkt umgebenden, geschlossenen Linie, also auch längs einer, von einem beliebigen Punkte ausgehen-

*) *Puiseux*, Recherches sur les fontions algébriques. III. Partie. (*Liouville*, Journ. de math. T. 15. p. 429.)

Digitized by Google

den Elementarcontur um den Nullpunkt genommen wird. Wir haben hier

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad t = 0,$$

also

$$(z - t) f(z) = \frac{z}{z} = 1;$$

demnach ist auch

$$p = 1,$$

und der Werth des Integrals gleich

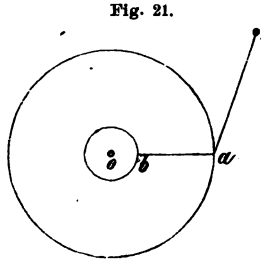
$$\pm 2\pi i,$$

je nachdem die Elementarcontur in positiver oder negativer Richtung durchlaufen wird. Wird die Elementarcontur n-mal hinter einander in der gleichen Richtung durchlaufen, so ist der Werth des Integrals

$$\pm 2n\pi i.$$

Nimmt man nun das Integral zwischen den Grenzen 1 und z, wo z einen beliebigen Werth der Variablen bedeuten, und der Werth 1 durch den Punkt a (Fig. 21) dargestellt werden möge, und bezeichnet man das längs der geraden Linie az genommene Integral, welches das geradlinige Integral genannt werden soll, mit $(\log z)$, so erhält das Integral nach dem zweiten Satze des vorigen Paragraphen auf jedem Wege, der den ausgezeichneten Punkt nicht umschliesst, ebenfalls den Werth $(\log z)$; jeder Weg aber, der den ausgezeichneten Punkt ein oder mehrere Male umwindet, ertheilt dem Integrale denselben Werth, wie der Weg, welcher entsteht, wenn man der geraden Linie die Elementarcontur von a aus um den Nullpunkt in ein- oder mehrmaliger Umkreisung vorhergehen lässt. Nimmt man daher auf alle Wege Rücksicht, welche die Variable von dem Punkte a bis z durchlaufen kann, so erhält man für alle Werthe, die das Integral annehmen kann, die Formel

Fig. 21.



$$\int_1^z \frac{dz}{z} = (\log z) + 2n\pi i,$$

worin n jede positive oder negative ganze Zahl und auch Null

Digitized by Google

sein kann. Hieraus geht hervor, dass das vorliegende Integral, wenn man nur keinen der möglichen Integrationswege ausschliesst, in der That die Function $\log z$ in ihrer ganzen Vieldeutigkeit darstellt.

Zweites Beispiel.

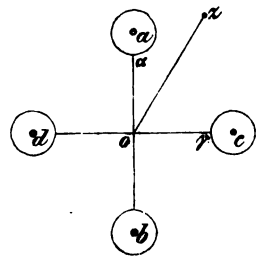
$$\int \frac{dz}{1+z^2}.$$

In diesem Integrale ist die Function

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

ebenfalls monodrom in der ganzen Ebene, sie wird aber unendlich für $z = +i$ und für $z = -i$, daher sind die Punkte $+i$ und $-i$ ausgezeichnete Punkte. Sie sind in Fig. 26 mit a und b bezeichnet. Untersucht man die Integrale längs der Elementarconturen um diese Punkte, so ist, wenn man $t_1 = i$ und $t_2 = -i$ setzt,

Fig. 26.



$$(z - t_1) f(z) = \frac{z-i}{1+z^2} = \frac{1}{z+i},$$

folglich der Grenzwerth für $z = i$:

$$p_1 = \lim (z - t_1) f(z) = \frac{1}{2i};$$

ebenso ist

$$(z - t_2) f(z) = \frac{z+i}{1+z^2} = \frac{1}{z-i},$$

und der Grenzwerth für $z = -i$:

$$p_2 = \lim (z - t_2) f(z) = -\frac{1}{2i};$$

die Werthe, welche das Integral längs der beiden Elementarconturen um die Punkte $+i$ und $-i$ erhält, sind daher resp.

$$+\pi \text{ und } -\pi.$$

Nimmt man das Integral längs der geschlossenen Linie, welche beide ausgezeichnete Punkte so umgiebt, dass beide in positiver Richtung umkreist werden, so erhält dasselbe nach dem letzten Satze des vorigen Paragraphen den Werth

$$\pi - \pi = 0.$$

Bezeichnet man nun, ähnlich wie vorhin, mit (arc tg z)

Digitized by Google

das geradlinige Integral zwischen den Grenzen 0 und z, und lässt der geraden Linie die beiden Elementarconturen, jede beliebig oft, vorangehen, so sind alle übrigen Integrationswege einem der ersteren äquivalent; daher ist der in Rücksicht auf alle möglichen Integrationswege vollständige Werth des Integrals

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = (\text{arc tg } z) + n\pi,$$

wo n eine positive oder negative ganze Zahl (Null eingeschlossen) bedeutet, stellt also die vieldeutige Function Arcus Tangens vollständig dar.

Wir wollen bei diesem Beispiele den Werth des Integrals, wenn es längs einer der beiden Elementarconturen genommen wird, des Folgenden wegen, auch noch direct ermitteln.

Lässt man die Variable vom Nullpunkte auf der Ordinatenaxe bis zu einem nahe an $+i$ (a in der Fig.) liegenden Punkte α gehen, einen ganzen Kreis mit dem Radius ϱ um a beschreiben und dann nach dem Nullpunkte zurückkehren, so zerlegt sich das längs dieses Weges genommene Integral in drei Theile, nämlich in die beiden geradlinigen Integrale $J(o\alpha)$ und $J(\alpha o)$ und das längs des Kreises genommene Integral. Aber da die Function monodrom ist, so hat sie, wenn z zum zweiten Male nach α kommt, dort denselben Werth, wie beim ersten Male; folglich sind die beiden Integrale $J(o\alpha)$ und $J(\alpha o)$ gleich und entgegengesetzt und heben sich auf, sodass nur das Integral längs des Kreises ermittelt zu werden braucht*). Setzt man zu diesem Zwecke

$$z - i = \varrho e^{i\varphi},$$

so ist auf diesem Integrationswege ϱ constant, und φ wächst von φ_0 bis $\varphi_0 + 2\pi$, wenn φ_0 den Anfangswerth von φ bedeutet. Nun ist aber

$$z + i = 2i + \varrho e^{i\varphi}, \quad dz = i\varrho e^{i\varphi}\, d\varphi,$$

demnach

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{i\,d\varphi}{2i + \varrho e^{i\varphi}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{d\varphi}{2 - i\varrho e^{i\varphi}}.$$

*) Dies folgt auch aus dem dritten Satze des vorigen Paragraphen.

Digitized by Google

Lässt man alsdann den Radius ϱ bis ins Unendliche abnehmen, so erhält man als Grenzwerth

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} \frac{d\varphi}{2} = \pi$$

wie oben. Auf dieselbe Weise ergiebt sich durch die Substitution

$$z + i = \varrho e^{i\varphi}$$

bei der andern Elementarcontur der Integralwerth $-\pi$.

Drittes Beispiel.

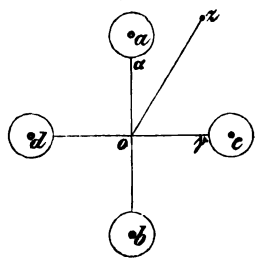
$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Hier ist die Function

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

nicht in der ganzen Ebene monodrom, vielmehr wird sie nicht nur unendlich in den beiden ausgezeichneten Punkten $z = +1$ und $z = -1$ (c und d, Fig. 26), sondern sie wechselt auch das Zeichen, wenn die Variable eine geschlossene Linie um einen dieser Punkte beschreibt und auf ihren Ausgangspunkt wieder zurückkommt. Zur Ermittelung der Integralwerthe für die Elementarconturen reicht daher hier der Cauchy'sche Satz nicht mehr aus, sondern wir müssen dazu in ähnlicher Weise verfahren, wie es am Ende des vorigen Beispiels angegeben worden ist. Zugleich aber müssen wir auch den Werth angeben, mit welchem die Function $\sqrt{1 - z^2}$ von dem Punkte $z = 0$ ausgehen soll, wir wählen dazu den Werth $+1$. Wir lassen also die Variable von o auf der Abscissenaxe bis zu einem nahe an c liegenden Punkte γ gehen, beschreiben mit ihr einen Kreis um c mit dem Radius ϱ und kehren auf der Abscissenaxe von γ nach o zurück. Zerlegt man nun aber wieder das Integral längs dieser Elementarcontur in die beiden geradlinigen Integrale $J(o\gamma)$, $J(\gamma o)$ und das Integral längs des Kreises, so heben sich die

Fig. 26.



Digitized by Google

beiden ersteren hier nicht auf; denn da die Function $\sqrt{1-z^2}$ nach der Umkreisung des Punktes c mit dem entgegengesetzten Zeichen nach γ zurückkommt, die Elemente dz auf dem Wege γo ebenfalls das entgegengesetzte Zeichen haben, so erhalten die Elemente

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

auf dem Wege γo dieselben Werthe, wie auf dem Wege $o\gamma$, und daher ist

$$J(\gamma o) = J(o\gamma) \quad \text{und} \quad J(o\gamma) + J(\gamma o) = 2J(o\gamma).$$

Zur Ermittelung des kreisförmigen Integrals setze man ferner, damit ϱ constant sei,

$$1 - z = \varrho e^{i\varphi},$$

dann erhält man

$$1 + z = 2 - \varrho e^{i\varphi}, \quad dz = -i\varrho e^{i\varphi}\, d\varphi,$$

mithin

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -i\varrho^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{1}{2}i\varphi}\, d\varphi}{\sqrt{2-\varrho e^{i\varphi}}}.$$

Lässt man nun aber hierin den Radius ϱ bis ins Unendliche abnehmen, so nimmt auch der Werth dieses Integrals bis ins Unendliche ab; zugleich nähert sich der Punkt γ dem Punkte c, der Integralwerth für diese Elementarcontur reducirt sich daher auf den doppelten Werth des geradlinigen Integrals zwischen den Grenzen 0 und 1. Folglich erhält man dafür

$$2J(oc) = 2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2 \arcsin 1 = \pi.$$

Ganz in derselben Weise ergiebt sich, dass der Integralwerth für die Elementarcontur um -1 sich auf den doppelten Werth des geradlinigen Integrals zwischen den Grenzen 0 und -1 reducirt. Man erhält dann für dieses Integral den Werth

$$2\int_0^{-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\pi.$$

Wenn die Function $\sqrt{1-z^2}$ aus dem Punkte $z=0$ mit dem Werthe -1 ausgeht, so erhalten auch die Integralwerthe

Digitized by Google

längs der Elementarconturen die entgegengesetzten Werthe, also um den Punkt $+1$ den Werth $-\pi$, und um den Punkt -1 den Werth $+\pi$; denn während z auf der geraden Linie von 0 bis $+1$ oder -1 geht, kann die Wurzel ihr Zeichen nicht wechseln, sondern behält das einmal erhaltene bei.

Lässt man nun die Variable die Elementarcontur um den Punkt $+1$ zweimal hinter einander durchlaufen, so erhält das Integral nach dem ersten Umlaufe den Werth $+\pi$; nun hat aber die Wurzel das Zeichen gewechselt, der zweite Umlauf giebt also dem Integral den Werth $-\pi$ und daher beide zusammen den Werth $\pi - \pi = 0$. Ebenso verhält es sich, wenn die Variable die Elementarcontur um den Punkt -1 zweimal hintereinander durchläuft. Wenn dagegen zuerst die Elementarcontur um den Punkt $+1$, und dann die um den Punkt -1 beschrieben wird, so erhält das Integral bei dem zweiten Umlaufe wegen des erfolgten Zeichenwechsels der Wurzel den Werth $+\pi$, und daher auf beiden Umläufen den Werth $\pi + \pi = 2\pi$. Ebenso ist es, wenn zuerst die Elementarcontur um den Punkt -1, und dann die um den Punkt $+1$ beschrieben wird; auf diesem Wege erhält das Integral den Werth -2π.

Bezeichnet man nun wieder das geradlinige Integral zwischen den Grenzen 0 und z mit $(\text{arc sin } z)$, wenn die Wurzel mit dem Werthe $+1$ von dem Punkte $z = 0$ ausgeht, so kann man zuerst dieser geraden Linie eine der beiden Elementarconturen vorhergehen lassen, dann erhält das Integral wegen des nach dem Umlaufe um die Elementarcontur erfolgten Zeichenwechsels den Werth

$$\pm\pi - (\text{arc sin } z).$$

Zweitens kann man zuerst beide Elementarconturen hinter einander beliebig oft beschreiben, dann erfolgt eine gerade Anzahl von Zeichenwechseln, mithin kommt die Wurzel wieder mit dem Werthe $+1$ nach dem Punkte $z = 0$ zurück; geht man also hierauf in gerader Linie von 0 nach z, so erhält das Integral den Werth

$$2n\pi + (\text{arc sin } z);$$

endlich kann man zwischen dem Umlaufe um beide Elementarconturen und der geraden Linie noch einen Umlauf um

Digitized by Google

eine der beiden Elementarconturen einschalten; dann erhält man für das Integral den Werth

$$2n\pi \pm \pi - (\text{arc sin } z).$$

Damit sind alle Wege, auf welchen das Integral verschiedene Werthe erhalten kann, erschöpft, und es ergeben sich für diese die beiden Reihen

(7) . . . . . $2n\pi + (\text{arc sin } z)$

und

(7) . . . . . $(2n+1)\pi - (\text{arc sin } z)$,

in welchen n jede positive oder negative ganze Zahl und Null bedeuten kann.

Die drei bis jetzt betrachteten Beispiele zeigen, dass die drei Integrale

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \log z, \quad \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tg } z, \quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \text{arc sin } z,$$

vieldeutige Functionen ihrer oberen Grenzen darstellen, indem jedem Werthe der letzteren eine Reihe von Werthen des Integrals zugehört, die um Vielfache gewisser constanter Grössen von einander verschieden sind. Diese Constanten sind bei den drei Integralen der Reihe nach

$$2\pi i, \ \pi \text{ und } 2\pi.$$

Betrachtet man nun umgekehrt die oberen Grenzen als Functionen der Integrale, so werden diese Functionen periodische Functionen, da sie für eine Reihe in arithmetischer Progression auf einander folgender Werthe des Integrals gleiche Werthe annehmen; bezeichnet man die Integrale mit u, so ist

$$e^{u+2n\pi i} = e^u, \ \text{tg}(u+n\pi) = \text{tg } u, \ \sin(u+2n\pi) = \sin u.$$

Man nennt daher die constanten Grössen, um deren Vielfache die Integralwerthe sich unterscheiden, Perioden.

Man kann sich von der Periodicität eine geometrische Vorstellung machen, wenn man die Ebene durch parallele Gerade in Streifen zerlegt; diese Parallelen laufen bei der Function e^u der Abscissenaxe parallel und sind um 2π von einander entfernt; bei den Functionen tg u und sin u dagegen sind sie der Ordinatenaxe parallel und haben resp. die

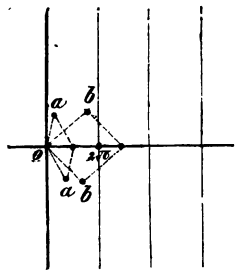
Digitized by Google

Entfernungen π und 2π von einander. In jedem dieser Streifen erhält die Function ihre sämmtlichen Werthe, und in je zwei entsprechenden Punkten zweier verschiedener Streifen nimmt die Function dieselben Werthe an. Die Functionen e^u und $\operatorname{tg} u$ nehmen in jedem Streifen jeden ihrer Werthe nur einmal an, d. h. sie haben in je zwei verschiedenen Punkten des nämlichen Streifens verschiedene Werthe. Die Function $\sin u$ aber nimmt wegen des zweiten der Ausdrücke (7) in jedem Streifen ihre sämmtlichen Werthe zweimal an, denn da nun auch

$$\sin[(2n+1)\pi - u] = \sin u$$

ist, so erhält $\sin u$ den gleichen Werth für jede zwei Werthe von u, deren Summe entweder gleich π oder gleich einem ungeraden Vielfachen von π ist. Je zwei solche Punkte a, a oder b, b desjenigen Streifens z. B., der von den durch den Nullpunkt und den Punkt 2π gezogenen Parallelen gebildet wird, liegen daher so, dass sie mit dem Nullpunkt und einem der Punkte π oder 3π ein Parallelogramm bilden, in welchem die Gerade von o nach π oder von o nach 3π eine Diagonale ist. (S. Fig. 30.)*)

Fig. 30.



Viertes Beispiel**).

Zuletzt wollen wir nun auch das elliptische Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

betrachten. Dieses ist dem vorigen in vieler Beziehung analog. Auch hier ist die Function nicht monodrom, sondern wechselt das Zeichen beim Umlaufe um einen der vier ausgezeichneten Punkte $z = +1$, $z = +\frac{1}{k}$, $z = -1$, $z = -\frac{1}{k}$.

*) Ueber die weitere Ausführung dieser Betrachtungen verweisen wir auf die Schrift von *Briot* und *Bouquet*: „Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques."

**) Vgl. hiezu die früher erwähnte Abhandlung von *Puiseux* und die eben genannte Schrift von *Briot* und *Bouquet*.

Digitized by Google

Untersucht man die Integrale längs einer der vier Elementarconturen, indem man annimmt, dass die Wurzelgrösse mit dem Werthe $+1$ von dem Puncte $z = 0$ ausgeht, zerlegt man also wie vorhin das Integral längs der Elementarcontur in zwei geradlinige und ein kreisförmiges, so werden auch hier die kreisförmigen Integrale unendlich klein. Um dies für alle vier zu gleicher Zeit einzusehen, bezeichnen wir die vier Werthe $+1, +\frac{1}{k}, -1, -\frac{1}{k}$ mit a, b, c, d, sodass jeder der letzteren nach und nach jeden der ersteren bedeuten kann. Dann wird das Integral:

$$\frac{1}{k}\int \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}.$$

Setzt man nun

$$z - a = \varrho e^{i\varphi},$$

so bleibt bei der kreisförmigen Integration um den Punkt a der Radius ϱ constant, und φ wächst von φ_0 bis $\varphi_0 + 2\pi$, wenn φ_0 den Anfangswerth von φ bezeichnet. Dann ist ferner

$$\begin{aligned} z - b &= a - b + \varrho e^{i\varphi}, \\ z - c &= a - c + \varrho e^{i\varphi}, \\ z - d &= a - d + \varrho e^{i\varphi}, \\ dz &= i\varrho e^{i\varphi} d\varphi; \end{aligned}$$

demnach geht das kreisförmige Integral über in

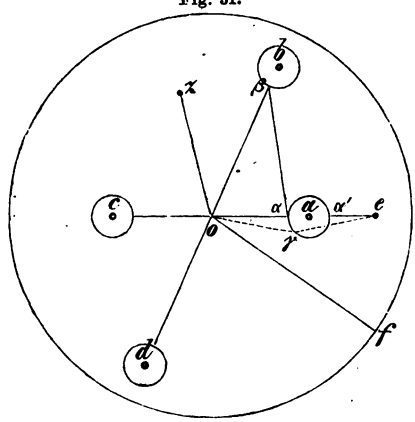
$$(8) \cdots \frac{i\varrho^{\frac{1}{2}}}{k}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{e^{\frac{1}{2}i\varphi} d\varphi}{\sqrt{(a-b+\varrho e^{i\varphi})(a-c+\varrho e^{i\varphi})(a-d+\varrho e^{i\varphi})}},$$

und wird, wie leicht ersichtlich, mit ϱ zugleich unendlich klein. Da nun nach dem Umlauf um die Peripherie des Kreises die Wurzelgrösse ihr Zeichen gewechselt hat, und daher die geradlinigen Integrale einander gleich werden, so reduciren sich auch hier die Integrale längs der Elementarconturen auf die doppelten Werthe der geradlinigen Integrale zwischen den Grenzen 0 und resp. $+1, +\frac{1}{k}, -1, -\frac{1}{k}$. Dabei entsteht aber eine kleine Schwierigkeit. Wenn nämlich der Modul k reell, positiv und kleiner als 1 ist, so führen die geraden Linien von o nach $\pm\frac{1}{k}$ durch die Punkte ± 1 hindurch. Bei der Integration zwischen den Grenzen o und

Digitized by Google

$\pm \frac{1}{k}$ müssen aber die ausgezeichneten Punkte ± 1 vermieden werden. Dies kann nun zwar dadurch geschehen, dass man die gerade Linie in der Nähe dieser Punkte eine kleine Ausbiegung machen lässt, aber dabei sind zwei verschiedene Wege möglich. Nehmen wir zuerst an, die Variable z gehe vom Nullpunkte bis zu einem nahe an $+1$ (a, Fig. 31) liegenden Punkte α, beschreibe einen kleinen Halbkreis um a nach α' und gehe dann zu dem Punkte $\frac{1}{k}$ (e in der Fig.); untersucht man dann den Werth, den das Integral auf diesem Wege erhält, so verschwindet das Integral längs des Halbkreises zugleich mit dem Radius des letzteren, weil sein Werth durch den Ausdruck (8) gegeben wird, wenn man darin statt der oberen Grenze $\varphi_0 + 2\pi$ nur $\varphi_0 + \pi$ setzt; und da die Wurzelgrösse auf der Peripherie des Halbkreises das Zeichen nicht wechselt, so reducirt sich beim Verschwinden des Kreisradius der Werth des Integrals auf die Summe der beiden geradlinigen Integrale $J(oa) + J(ae)$. Man kann nun aber zweitens den ausgezeichneten Punkt a in folgender Weise umgehen, wenn man die Variable von o nach einem nahe an a, aber ausserhalb der Abscissenaxe, liegenden Punkt γ gehen, dann einen ganzen Kreis um a beschreiben und darauf von γ nach e gehen lässt. Dann verschwindet zwar auch das kreisförmige Integral zugleich mit dem Radius, aber die Wurzelgrösse wechselt jetzt das Zeichen, und daher erhält man, wenn bei verschwindendem Radius der Punkt γ mit a zusammenfällt, für den Werth des Integrals die Differenz $J(oa) - J(ae)$*). Hiedurch be-

Fig. 31.



*) Die nämlichen zwei Werthe erhält man natürlich auch, wenn man den Punkt a einmal auf dem oberen, das andere Mal auf dem unteren Halbkreise umgeht.

Digitized by Google

stätigt sich, dass das geradlinige Integral zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{k}$ in der That nicht unzweideutig ist, wenn der Modul k als ein reeller, positiver, echter Bruch angenommen wird. Dasselbe gilt von dem Integrale zwischen den Grenzen 0 und $-\frac{1}{k}$.

Aus diesem Grunde, und weil es auch eine leichtere Anschauung gewährt, wenn keine zwei der Elementarconturen in dieselbe gerade Linie zusammenfallen, wollen wir vorläufig annehmen, dass die Grösse $\frac{1}{k}$ einen beliebigen complexen Werth habe, und demnach die Werthe $+1$, $+\frac{1}{k}$, -1, $-\frac{1}{k}$ durch die Punkte a, b, c, d in Fig. 31 darstellen. Bezeichnet man dann ferner die Werthe der Integrale längs der vier Elementarconturen um die Puncte a, b, c, d der Reihe nach mit A, B, C, D, so ist

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = 2\int_0^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \\ B = 2\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \\ C = 2\int_0^{-1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \\ D = 2\int_0^{-\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \end{array} \right.$$

und alle diese Integrale sind längs der zwischen den Grenzen liegenden geraden Linien zu nehmen.

Es wiederholen sich nun die bei dem vorigen Beispiele angestellten Betrachtungen. Nach jedem Umlaufe um eine Elementarcontur wechselt die Wurzelgrösse das Zeichen, daher erhält auch das Integral längs eines darauf folgenden Weges das entgegengesetzte Zeichen. Wird also eine Elementarcontur, z. B. die um a, zweimal hinter einander beschrieben, so ist der Werth des Integrals $A - A = 0$,

Digitized by Google

und ebenso bei den anderen. Werden aber irgend zwei verschiedene Elementarconturen hinter einander beschrieben, z. B. um a und b, so ist der Werth des Integrals $A - B$. Alsdann hat die Wurzelgrösse zweimal das Zeichen gewechselt; geht also jetzt die Variable in gerader Linie von o nach einem beliebigen Punkte z, und ist u der Werth dieses geradlinigen Integrals, so wird der Werth des auf dem ganzen Wege genommenen Integrals $A - B + u$. Man kann die beiden Elementarconturen um a und b zusammen der Geraden oz so oft vorangehen lassen, als man will, daher ist $A - B$ eine der Perioden des Integrals. Da die Sache sich nun ebenso verhält, wenn man irgend zwei der Elementarconturen auf einander folgen lässt, so scheint es, dass man eben so viele Perioden erhalten wird, als die Anzahl der Combinationen der vier Elementarconturen zu je zwei beträgt, nämlich die folgenden sechs:

$$\left.\begin{array}{lll} A - B, & A - C, & A - D, \\ B - C, & B - D, & C - D. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

Allein zuerst erhellt leicht, dass die drei unteren sich auf die drei oberen reduciren, denn man hat

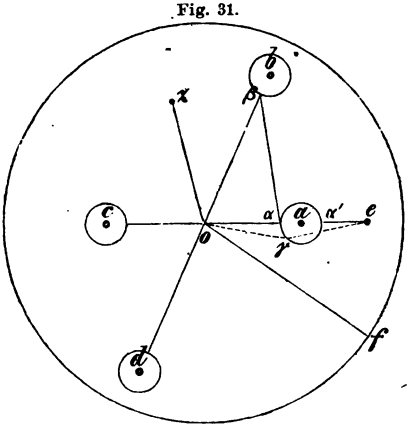
$$\begin{aligned} B - C &= A - C - (A - B), \\ B - D &= A - D - (A - B), \\ C - D &= A - D - (A - C); \end{aligned}$$

die drei unteren entstehen also durch Verbindung der drei oberen; z. B. der Werth $B - C$ würde auch entstehen, wenn man zuerst die Elementarconturen um a und c in positiver Richtung und dann die um a und b in negativer Richtung durchlaufen liesse. Man kann aber ferner zeigen, dass auch die dritte Periode $A - D$ aus einer Verbindung der beiden ersten $A - B$ und $A - C$ hervorgeht. Um dies einzusehen, untersuchen wir den Werth des Integrals längs einer geschlossenen Linie, welche alle vier Punkte a, b, c, d im Innern enthält. Zu dem Ende beschreiben wir um den Nullpunkt als Mittelpunkt einen Kreis, der alle vier Punkte umschliesst, und lassen die Variable z zuerst in gerader Linie von o nach einem beliebigen Punkte f dieses Kreises gehen, den Kreis in positiver Richtung durchlaufen und von f wieder

Digitized by Google

nach o zurückkehren; alsdann hat das Integral längs dieses Weges denselben Werth, wie längs der vier hinter einander durchlaufenen Elementarconturen, weil zwischen diesen beiden Wegen kein ausgezeichneter Punkt liegt, und die beiden Wege den nämlichen Anfangspunkt und den nämlichen Endpunkt haben, folglich der zweite Satz des § 85 auf sie angewendet werden kann. Der Werth des Integrals längs dieses Weges ist also

Fig. 31.



$$A - B + C - D.$$

Wenn aber die Variable von dem Punkte f aus die Peripherie des Kreises durchläuft und wieder nach f zurückkehrt, so hat die Wurzelgrösse viermal das Zeichen gewechselt. Denn, denkt man sich von dem Punkte f aus Elementarconturen um die vier Punkte a, b, c, d beschrieben, so können dieselben durch allmälige Uebergänge in die Peripherie des Kreises umgeformt werden, ohne dass ein ausgezeichneter Punkt überschritten wird. Demnach hat die Wurzelgrösse bei der Rückkehr nach f denselben Werth wie beim Ausgange; da dann also die Wege of und fo mit demselben Zeichen der Wurzel durchlaufen werden, so heben die Integrale $J(of)$ und $J(fo)$ einander auf, und das längs der vier hinter einander durchlaufenen Elementarconturen genommene Integral $A - B + C - D$ hat denselben Werth, wie längs der Peripherie des Kreises allein. Dieses letztere Integral kann man aber ermitteln. Setzt man nämlich

$$z = \varrho e^{i\varphi},$$

so erhält man dafür

$$i\varrho \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{e^{i\varphi} d\varphi}{\sqrt{(1-\varrho^2 e^{2i\varphi})\,(1-k^2\varrho^2 e^{2i\varphi})}},$$

Digitized by Google

oder

$$\frac{i}{\varrho}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi}\frac{e^{i\varphi}\,d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{1}{\varrho^2}-e^{2i\varphi}\right)\left(\frac{1}{\varrho^2}-k^2e^{2i\varphi}\right)}}.$$

Nun ist der Werth dieses Integrals, da die Wurzelgrösse auf der geschlossenen Peripherie des Kreises monodrom ist, für jeden Werth des Radius ϱ derselbe, wenn nur der Kreis alle die vier ausgezeichneten Punkte umschliesst. Man kann also auch den Radius bis ins Unendliche zunehmen lassen, und dann hat das Integral den Grenzwerth Null. Demnach erhält man

$$A - B + C - D = 0^*).$$

Hieraus folgt

$$A - D = B - C,$$

oder

$$A - D = (A - C) - (A - B); \quad \cdots \quad (11)$$

also ist auch die dritte Periode aus den beiden ersten zusammengesetzt, sodass die sechs unter (10) aufgestellten Perioden sich schliesslich auf die zwei folgenden

$$A - C \quad \text{und} \quad A - B$$

reduciren.

Bezeichnet nun wieder u das geradlinige Integral zwischen den Grenzen 0 und einem beliebigen Werthe z, so kann man zuerst der geraden Linie die obigen beiden Paare von Elementarconturen, jede in beliebiger Wiederholung, vorangehen lassen; das giebt, wenn n und m beliebige positive oder negative ganze Zahlen oder auch Null bedeuten, für das Integral folgende Reihe von Werthen:

$$n(A - C) + m(A - B) + u;$$

ferner kann man ausser diesen beiden Paaren von Elementarconturen noch eine einzige der vier Elementarconturen dem geradlinigen Integral vorhergehen lassen; dann erhält man

*) Diese Gleichung folgt in dem vorliegenden Falle schon aus den Formeln (9); die mitgetheilte Ableitung gilt aber zugleich für den Fall, dass an die Stelle der paarweise gleichen und entgegengesetzten Grössen $+1, -1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ irgend vier beliebige Grössen treten.

Digitized by Google

vier neue Reihen, nämlich wegen des nach einmaligem Umlaufe um eine Elementarcontur erfolgten Zeichenwechsels:

$$n(A-C)+m(A-B)+A-u,$$
$$n(A-C)+m(A-B)+B-u,$$
$$n(A-C)+m(A-B)+C-u,$$
$$n(A-C)+m(A-B)+D-u,$$

aber diese lassen sich alle auf die erste reduciren, denn man hat

$$n(A-C)+m(A-B)+B-u$$
$$=n(A-C)+(m-1)(A-B)+A-u,$$
$$n(A-C)+m(A-B)+C-u$$
$$=(n-1)(A-C)+m(A-B)+A-u;$$

endlich weil

$$D=A-(A-D),$$

oder nach (11)

$$D=A-(A-C)+(A-B)$$

ist:

$$n(A-C)+m(A-B)+D-u$$
$$=(n-1)(A-C)+(m+1)(A-B)+A-u.$$

Demnach sind alle Werthe, welche das Integral zwischen den Grenzen 0 und z auf allen möglichen Intregrationswegen erhalten kann, in folgenden zwei Formeln enthalten:

$$n(A-C)+m(A-B)+u,$$

und

$$n(A-C)+m(A-B)+A-u,$$

und es bleibt jetzt noch übrig, die Werthe von A, $A-C$ und $A-B$ wirklich anzugeben.

Die beiden ersten machen keine Schwierigkeit, denn es folgt aus (9) $C=-A$, demnach ist

$$A=2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

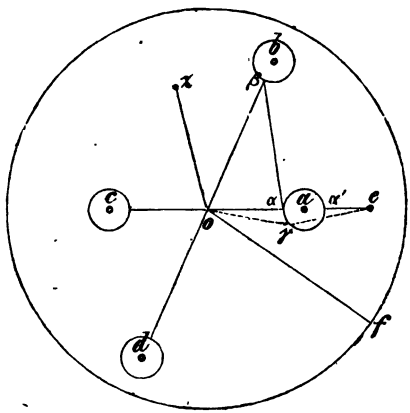
$$A-C=4\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Der Werth von $A-B$ ist das Integral längs der beiden auf einander folgenden Elementarconturen um a und b. Diesem Wege kann man aber folgenden anderen substituiren. Man gehe von o nach einem nahe an a gelegenen Punkte α, be-

Digitized by Google

schreibe einen ganzen Kreis um a, gehe dann von α in gerader Linie nach einem nahe bei b liegenden Punkte β und beschreibe ebenfalls einen ganzen Kreis um b; darauf gehe man wieder von β nach α zurück und endlich von α, ohne den Punkt a aufs Neue zu umwinden, nach dem Nullpunkte. Auf diesem Wege erhält das Integral denselben Werth, wie auf dem vorigen, weil zwischen beiden Wegen kein ausgezeichneter Punkt liegt, und beide den nämlichen Anfangspunkt und den nämlichen Endpunkt haben, also wieder der zweite Satz des § 85 angewendet werden kann. Nun erleidet die Wurzelgrösse bei der Umkreisung des Punktes a einen Zeichenwechsel, bei der Umkreisung des Punktes b einen zweiten Zeichenwechsel, sie kommt also mit dem ursprünglichen Zeichen in α wieder an, der Weg $o\alpha$ wird daher in beiden Richtungen mit gleichem Zeichen der Wurzel durchlaufen, und die geradlinigen Integrale $J(o\alpha)$ und $J(\alpha o)$ heben sich auf. Nehmen nun die Radien der Kreise bis ins Unendliche ab, so verschwinden die kreisförmigen Integrale, und da der Weg $\alpha\beta$ mit negativem, der umgekehrte Weg $\beta\alpha$ dagegen mit positivem Zeichen der Wurzel durchlaufen wird, so reducirt sich der Werth von $A - B$ auf den negativen und doppelten Werth des geradlinigen Integrals von α bis β, d. h. wenn die Kreisradien verschwinden, der Punkt α mit a, und β mit b zusammenfällt, zwischen den Grenzen 1 und $\frac{1}{k}$; also ist

Fig. 31.



$$A - B = -2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Jetzt hat es kein Bedenken mehr, den Modul k als einen reellen und positiven echten Bruch anzunehmen, denn die

Digitized by Google

geradlinigen Integrale sind jetzt nur noch zwischen den Grenzen 0, 1 und 1, $\frac{1}{k}$ zu nehmen, sodass bei ihnen niemals ein ausgezeichneter Punkt überschritten wird. Macht man nun diese Annahme, so ist

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K,$$

und (nach S. 89)

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = iK',$$

demnach wird

$$A = 2K,$$

und die beiden Perioden sind, abgesehen vom Zeichen,

$$A - C = 4K, \quad A - B = 2iK';$$

also sind alle Werthe des auf beliebigen Wegen zwischen den Grenzen 0 und z genommenen elliptischen Integrals

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

in den beiden Formeln

$$4nK + 2miK' + u$$

und

$$4nK + 2miK' + 2K - u$$

enthalten.

Die umgekehrte Function sin $am\ u$ ist daher doppelt periodisch, die Indices ihrer Perioden sind $4K$ und $2iK'$, und man erhält

$$(12)\quad \begin{cases} \sin am\,(4nK + 2miK' + u) = \sin am\,u, \\ \sin am\,(2(2n+1)K + 2miK' - u) = \sin am\,u. \end{cases}$$

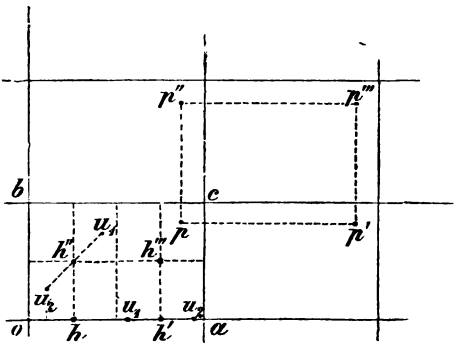
Wegen der zweiten Gleichung erhält die Function sin $am\ u$ innerhalb jeder Periode denselben Werth für zwei verschiedene Werthe von u, deren Summe entweder gleich $2K$ oder ein ungerades Vielfaches von $2K$, oder eines von diesen beiden, vermehrt um ein Vielfaches von $2iK'$, ist.

Auch von der doppelten Periodicität kann man sich ein geometrisches Bild machen. Zieht man nämlich eine Reihe von geraden Linien in den Abständen $4K$ der Ordinatenaxe

Digitized by Google

parallel und eine zweite Reihe parallel der Abscissenaxe in den Abständen $2K'$ (Fig. 32), so wird dadurch die Ebene in Rechtecke eingetheilt, so dass die Function sin $am\ u$ in jedem Rechteck ihre sämmtlichen Werthe erhält und in je zweien entsprechenden Punkten verschiedener Rechtecke gleiche Werthe annimmt. Denn es sei $oa = 4K$, $ob = 2K'$, und in p habe die Variable den Werth u; macht man nun pp' und $p''p'''$ gleich und parallel oa, pp'' und $p'p'''$ gleich und parallel ob, so hat die Variable in den Punkten p', p'', p''' resp. die Werthe $u + 4K$, $u + 2iK'$, $u + 4K + 2iK'$, und folglich hat die Function sin $am\ u$ in ihnen denselben Werth wie in p. In jedem Rechteck nimmt sin $am\ u$ denselben Werth zwei Mal oder in zwei Punkten an. Diese sind im Allgemeinen verschieden, können aber auch zusammenfallen. Bezeichnet man nämlich zwei solche Punkte oder Werthe von u mit u_1 und u_2, so ist nach der zweiten der Formeln (12)

Fig. 32.



$$u_1 + u_2 = 2(2n + 1)K + 2miK',$$

also

$$\frac{u_1 + u_2}{2} = (2n + 1)K + miK'. \quad \cdots \quad (13)$$

Diese letzteren Werthe, welche mit h bezeichnet werden mögen, liefern diejenigen Punkte, in denen u_1 und u_2 zusammenfallen; ausserdem aber zeigt sich, dass jedes andere Paar zusammengehöriger u_1 und u_2 so liegt, dass ihre Verbindungslinie durch einen Punkt h hindurchgeht und in diesem halbirt wird. Schliesst man in dem Rechteck $oacb$ die Geraden bc und ac aus, weil auf ihnen die Variable u gerade um $2iK'$ und $4K$ grösser ist, als in den entsprechenden Punkten der Geraden oa und ob, so fallen von den Punkten h vier in das Rechteck $oacb$, und man erhält dieselben, wenn man in (13) den Zahlen n und m die Werthe 0 und 1 giebt, also

$$K, \quad 3K, \quad K + iK', \quad 3K + iK',$$

Digitized by Google

welche in Fig. 32 mit h, h', h'', h''' bezeichnet worden sind. Mit Hülfe eines dieser vier Punkte kann man auf die angegebene Weise zu jedem Punkte u_1 den zugehörigen u_2 finden, für welchen sin *am* u in dem nämlichen Rechteck denselben Werth zum zweiten Male erhält.

Vorstehendes möge zu dem doppelten Zwecke, der hier vorlag, genügen. Es kam zuerst darauf an, die Schwierigkeiten zu entfernen, welche die Definition der elliptischen Function als Umkehrung des elliptischen Integrals unzweifelhaft darbietet, sobald man nicht complexe Integrale mit in Betracht zieht*). Es ist gezeigt worden, dass Integrale algebraischer Functionen, wenn man die Variable nicht bloss alle reellen, sondern auch alle möglichen stetig auf einander folgenden complexen Werthe zwischen zwei bestimmten Grenzen durchlaufen lässt, unendlich viele verschiedene Werthe annehmen und durch ihre Umkehrung periodische Functionen erzeugen können; ferner, dass man mit Hülfe der geometrischen Darstellung der imaginären Grössen eine deutliche Vorstellung von der doppelten Periodicität und von dem Uebergange vom Reellen zum Imaginären gewinnen kann. Die zweite Absicht, die den in dem letzten Abschnitte angestellten Betrachtungen zum Grunde lag, ging dahin, auf die grosse Bedeutung hinzuweisen, welche die Einführung complexer Variablen auf die Theorie der Functionen überhaupt, besonders der elliptischen Functionen hat. Es mag nun für das weitere Studium der letzteren von diesem Gesichtspunkte aus auf die oben erwähnte Schrift von *Briot* und *Bouquet*, auf die betreffenden Abschnitte in *Schlömilch*'s Compendium der höheren Analysis Bd. 2 und auf die Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen von *Königsberger* verwiesen werden.

*) Vgl. die erste Note auf S. 4.

Digitized by Google

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Clebsch, Dr. A., Prof. an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe [† als Professor in Göttingen], Theorie der Elasticität fester Körper. (XI u. 424 S.) gr. 8. 1862. geh. n. 9 Mk.

„Der Herr Verfasser hatte als Lehrer an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe Gelegenheit und Beruf, sich ausführlicher mit den Anwendungen der allgemeinen Theorie der Elasticität auf die in der Technik besonders wichtigen Fälle zu beschäftigen. Die Resultate dieser Studien liegen uns jetzt in einem ziemlich umfangreichen Werke vor, und man kann dem Verfasser nur Dank wissen, dass er unsere deutsche Literatur um eine Schrift bereichert hat, welche einerseits dem Techniker das Erlernen der strengen Theorie ermöglicht, ihm über die Genauigkeit seiner Resultate und die Zulässigkeit der in der Praxis üblichen Voraussetzungen Aufschluss giebt, andererseits den Mathematiker belehrt, wie man von den allgemeinsten Gleichungen der Bewegungen und des Gleichgewichts elastischer Körper zu speciellen Fällen gelangen kann, und ihm die grosse Mühe und Zeit erspart, in den Arbeiten der Techniker den Weizen von der Spreu zu sondern. Es ergänzt daher dieses Handbuch das berühmte Werk des französischen Physikers Lamé, welches vorzüglich die allgemeinen Differentialgleichungen, ihre eleganten Transformationen, die Theorie der krystallinischen Körper und ihre optischen Eigenschaften behandelt, während Herr Clebsch ausschliesslich unkrystallinische Körper und deren Verschiebungen durch äussere Kräfte in Betrachtung zieht.“ [Literarisches Centralblatt 1863, No. 31.]

——— Theorie der binären algebraischen Formen. (VIII u. 467 S.) gr. 8. 1871. geh. n. 11 Mk.

Gegenüber dem von Hrn. Fiedler übersetzten Salmon'schen Lehrbuche, welches bisher das Hauptmittel für das Studium der neuern Algebra war, wird man in dem vorliegenden Werke einerseits eine Beschränkung, andererseits Erweiterungen finden. Die Beschränkung besteht darin, dass nur binäre Formen behandelt sind. Dies wurde fast geboten durch den Umstand, dass nur die Theorie der binären Formen bis jetzt in gewissem Grade abgeschlossen scheint. Der Verfasser geht davon aus, Invarianten und Covarianten durch symbolische Producte zu definiren; ein Standpunkt, welcher ihm schon vor 10 Jahren als der richtigste erschien. Diese Ansicht hat im Laufe der Zeit um so mehr sich bei ihm festigen müssen, als gerade hiervon ausgehend Herr Gordan den wichtigen Satz fand, dass die Anzahl der zu jeder Form gehörigen Invarianten und Covarianten eine endliche sei; und mit diesem Satze waren denn wieder Fragen gegeben, welche nur bei binären Formen aufgestellt und beantwortet werden können, und welche eben der Theorie der binären Formen jenen vorzugsweise entwickelten Charakter geben.

Indem diese und andere, auf frühern Arbeiten des Verfassers beruhenden Untersuchungen ausführlich behandelt sind, ist dem erwähnten Werke gegenüber eine sehr wesentliche Fortentwickelung gegeben, welche bis zu dem neuesten Stande dieser Disciplin führt.

Andrerseits wird in dem Werke die geometrische Interpretation berücksichtigt, welche neben den algebraischen Untersuchungen hergeht, und welche zugleich die Grundlage der synthetischen Geometrie liefert, nämlich die Theorie der Punktreihen und Strahlenbüschel.

Es ist endlich ein grosses Gewicht auf ausführliche Behandlung einiger Probleme gelegt, welche dem Studirenden als Muster für die Behandlung algebraischer Fragen dienen können, und welche ihn so auch praktisch in einen der wichtigsten Theile der neuern Mathematik einführen.

Clebsch, Dr. A., und P. Gordan, Professor in Erlangen, Theorie der Abel'schen Functionen. (XIII u. 333 S.) gr. 8. 1866. geh. n. 7 Mk. 20 Pf.

Die Herren Verfasser suchen in diesem Werke die Theorie der Abel'schen Functionen auf eine ganz neue Weise zu begründen, welche das Interesse der Mathematiker in hohem Grade erregt und das Verständniss der Theorie wesentlich gefördert hat.

Clebsch, Alfred, Vorlesungen über Geometrie. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Ferdinand Lindemann. Mit einem Vorwort von Felix Klein. Ersten Bandes erster Theil. (S. 1—496.) gr. 8. 1875. geh. n. 11 Mk. 20 Pf.

——— ——— Ersten Bandes zweiter Theil. (S. 497—1050 u. XII S.) gr. 8. 1876. geh. n. 12 Mk. 80 Pf.

Beide Theile in einem Band, geh. n. 24 Mk.

Es bedarf wohl kaum einer nähern Erklärung, wenn nach dem nur allzu früh erfolgten Hinscheiden von A. Clebsch alsbald der Gedanke entstand, seine Vorlesungen über Geometrie, welche für das Studium der Wissenschaft von so hervorragendem Einflusse waren, allgemein zugänglich zu machen. Es bezieht sich dies sowohl auf die ausschliesslich geometrischen, als auch auf einzelne Abschnitte anderer Vorlesungen, soweit in letzteren geometrische Probleme gelegentlich behandelt wurden. Dem Herausgeber fiel somit die Aufgabe zu, in möglichstem Anschlusse an den Vortrag, wofür ihm mehrere nachgeschriebene Hefte

Digitized by Google

zur Verfügung standen, und theilweise unter Benutzung von Clebsch herrührender Manuscripte ein zusammenhängendes Bild der verschiedenen geometrischen Disciplinen zu entwerfen, besonders unter Wahrung des einheitlichen Gedankenganges, welcher den Vorlesungen von Clebsch so sehr eigenthümlich war. Während sonach in den ersten Abtheilungen die rein geometrischen Gesichtspunkte vorwalten, drängt sich schon bei den Kegelschnitten, bez. den Flächen 2. Ordnung die Nothwendigkeit eines eingehenden Studiums der Invariantentheorie auf; und dieser algebraische Charakter kommt bei weiterem Fortschreiten immer mehr zur Geltung. Andererseits soll das Buch auch in jene überaus fruchtbaren Untersuchungen einführen, welche aus der Theorie der elliptischen und Abel'schen Functionen, sowie der eindeutigen Transformationen für die Geometrie erwachsen. Die erwähnten Ziele bezeichnen zugleich die Stellung dieser Vorlesungen gegenüber den von Herrn Fiedler übersetzten und bearbeiteten Salmon'schen Lehrbüchern, indem der Stoff, im Einzelnen mehr beschränkt, im Ganzen doch ein weiteres Gebiet umfasst.

In dem ersten Bande wird in dem angegebenen Sinne die Geometrie der Ebene behandelt. Den Schluss bildet die Darstellung der Grundzüge einer Theorie der Connexe, jener von Clebsch noch zuletzt in die Geometrie eingeführten Gebilde. — Der zweite Band, die Geometrie des Raumes enthaltend, wird in kurzer Zeit nachfolgen.

[Clebsch, Alfred.] Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen von einigen seiner Freunde. (55 S.) gr. 8. 1873. geh. n. 1 Mk. 20 Pf.

Separatabdruck aus „Mathematische Annalen".

Durège, Dr. H., ordentl. Professor an der Universität zu Prag, Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemann's. Zweite zum Theil umgearbeitete Auflage. (XII u. 233 S.) gr. 8. 1873. geh. n. 5 Mk. 20 Pf.

„Ich möchte, nach allen diesen Ueberlegungen, das Werk von Durège allen Anfängern empfehlen, welche sich eine erste Kenntniss der modernen mathematischen Anschauungsweisen erwerben wollen. Ich halte dafür, es sei sehr zweckmässig, dass der Lernende ziemlich bald sich an die Betrachtung der Eigenschaften der Functionen gewöhnt. Das gewöhnliche mathematische, mehr rechnende Verfahren wird durchaus nicht überflüssig durch diese neuere Betrachtungsweise; es lassen sich aber oftmals doch sehr grosse Rechnungen ersparen; ferner, was sowohl für das Studium, als auch für selbständige Arbeiten von grösstem Werthe ist, die Möglichkeit gewisser Darstellungen (als z. B. der elliptischen Functionen durch die ϑ) lässt sich sofort übersehen; es wird dadurch leichter, den Faden einer gegebenen Rechnung, welche man nachstudirt, zu behalten, und es kann viel zielloses Rechnen bei selbständigen Arbeiten vermieden werden. Ich empfehle daher das Werk nochmals einem Jeden, welcher sich mit Riemann'schen Arbeiten vertraut machen will, zum Vorstudium." [G. Roch in der Zeitschrift f. Mathematik u. Physik.]

——— die ebenen Curven dritter Ordnung. Eine Zusammenstellung ihrer bekannteren Eigenschaften. Mit 44 Figuren in Holzschnitt. (XII u. 343 S.) gr. 8. 1871. geh. n. 7 Mk. 20 Pf.

Die vorliegende Schrift entstand aus dem Wunsche, die Uebersicht über die grosse Zahl der bekannteren Eigenschaften der Curven dritter Ordnung möglichst zu erleichtern.

Dabei gab, abgesehen von anderen Schwierigkeiten, die Beantwortung der Frage, welche unter den zur Anwendung kommenden Sätzen aus der Geometrie der geraden Linie und der Kegelschnitte einer näheren Erörterung zu unterziehen, und welche als bekannt anzunehmen seien, zu mancherlei Zweifeln Anlass. Schliesslich schien es am angemessensten, so wenig wie möglich vorauszusetzen. Demgemäss ist fast nichts als bekannt angenommen worden, als die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks und Vierseits; dagegen sind alle, oder doch fast alle Hülfssätze, welche bei den Curven dritter Ordnung zur Anwendung gelangen, in einer besonderen Abtheilung zusammengestellt. In den vereinzelten Fällen, in denen die Erörterung eines Hülfssatzes unterlassen wurde, ist jedesmal auf solche Schriften verwiesen, von denen angenommen werden konnte, dass sie in Jedermanns Händen sind.

Die Figuren wurden zwar in einigen Fällen von vorher gezeichneten Curven abgenommen, meistens aber sind sie nur symbolisch dargestellt, theils wegen der leichteren Ausführbarkeit, theils aber, weil sie so zur Uebersicht geeigneter erschienen.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google